EJERCICIO 30 : Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas:

$$r: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

Solución:

- Un punto genérico de r es $R(-1+\mu,\ 2+2\mu,\ 3-\mu)$.
- Un punto genérico de s es $S(1+\lambda,\ -2+\lambda,\ 3+\lambda)$.

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es: $\overrightarrow{RS}(\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu-4,\ \lambda+\mu)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS}\cdot\vec{d}_r=\overrightarrow{RS}\cdot(1,2,-1)=0 \ \rightarrow\ 2\lambda-6\mu-8=0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{d}_s=\overrightarrow{RS}\cdot(1,1,1)=0 \ \rightarrow\ 3\lambda-2\mu-4=0 \end{array}\right\} \quad \lambda=\frac{4}{7} \quad \mu=\frac{-8}{7}$$

Así: $R\left(\frac{-15}{7},\frac{-2}{7},\frac{29}{7}\right)$; $S\left(\frac{-3}{7},\frac{-10}{7},\frac{25}{7}\right)$

$\overrightarrow{RS}\left(\frac{12}{7},\frac{-8}{7},\frac{-4}{7}\right) \,//\, (3,-2,-1)$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: $P: \begin{cases} x=\frac{-15}{7}+3\lambda \\ y=\frac{-2}{7}-2\lambda \\ z=\frac{29}{7}-\lambda \end{cases}$

EJERCICIO 43 : Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de ecuación $2x - y + z + 4 = 0$ y que dista 10 unidades del punto $P(2, 0, 1)$.

Solución:

Un plano paralelo a $2x - y + z + 4 = 0$ es de la forma: $\pi: 2x - y + z + D = 0$

Tenemos que hallar D para que la distancia a P sea 10 u: $\text{dist}(P,\pi)=\frac{|2\cdot 2+1+D|}{\sqrt{4+1+1}}=10$

$$|5+D|=10\sqrt{6} \begin{cases} 5+D=10\sqrt{6} \ \rightarrow\ D=10\sqrt{6}-5 \\ -5-D=10\sqrt{6} \ \rightarrow\ D=-5-10\sqrt{6} \end{cases}$$

Hay dos planos:

$2x-y+z+10\sqrt{6}-5=0$

$2x-y+z-10\sqrt{6}-5=0$

EJERCICIO 44 : Halla la ecuación de la proyección ortogonal, r', de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ **sobre el plano** π: $x - y + z + 2 = 0$.

Solución:

[1] Hallamos el puntode corte de la recta r y el plano π: $(2\alpha + 1) - (-\alpha) + (\alpha - 2) + 2 = 0 \Rightarrow 4\alpha + 1 = 0$

$\alpha = -1/4 \Rightarrow P_1(1/2, 1/4, -9/4)$

[2] Hallamos otro punto cualquiera de r: $\alpha = 0$ $P_r(1,0,-2)$

[3] Calculamos la recta perpendicular a π que pase por r: $s \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2+\lambda \end{cases}$

[4] Hallamos el punto P_2 de intersección entre la recta s y el plano π

$(1 + \lambda) - (-\lambda) + (-2 + \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow P_2(2/3,1/3,-7/3)$

[5] La recta pedida es la que pasa por P_1 y $P_2 \Rightarrow$ r' : $\begin{cases} \text{Punto}: P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{9}{4}\right) \\ \text{Vector}: P_1P_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12},-\frac{1}{12}\right) \| (2,1,-1) \end{cases} \Rightarrow$ r': $\begin{cases} x = \frac{1}{2}+2\lambda \\ y = \frac{1}{4}+\lambda \\ z = -\frac{9}{4}-\lambda \end{cases}$

11) Hallar la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Plano π_1 que contiene a r y a P: Todos los planos que contienen a r son (haz de planos):

$$x + y + z + t\,(2x + y + 3z - 1) = 0$$

salvo $2x + y + 3z - 1 = 0$, que no se consigue para ningún valor de t, pero que tampoco contiene a P. Veamos cuál de ellos contiene a P:

$$1 + 1 + 1 + t\,(2 + 1 + 3 - 1) = 0 \Rightarrow 3 + 5t = 0 \Rightarrow t = -3/5.$$

El plano es: $5x + 5y + 5z - 6x - 3y - 9z + 3 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 4z + 3 = 0 \equiv \pi_1$

- Plano π_2 perpendicular a r que contiene a P: Si es perpendicular a r, el vector de dirección de esta recta será normal a dicho plano. Como este vector es $\vec{n} \times \vec{n}'$ (ver problema 2)), resulta valer:

$$(1, 1, 1) \times (2, 1, 3) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, -1, -1)$$

el plano será: $2x - y - z + d = 0$. Para que pase por $(1, 1, 1)$:

$$2 - 1 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Luego el plano es: $2x - y - z = 0 \equiv \pi_2$.

Por tanto, la recta pedida es: $\begin{cases} -x + 2y - 4z + 3 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

Ejercicios resueltos   Problemas métricos

Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) Hallar la perpendicular común a las rectas r y s.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 4)

a) La recta t es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a la recta r, y π' el plano que contiene a s y pasa por el origen.

$$\pi: \left.\begin{array}{r} O(0,0,0) \\ \vec{u_r} = (-2,2,-4) \\ \overrightarrow{P_rO} = (-1,2,0) \end{array}\right\} \qquad \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8x + 4y - 2z = 0$$

$\pi: 4x + 2y - z = 0$

$$\pi': \left.\begin{array}{r} O(0,0,0) \\ \vec{v_s} = (3,1,1) \\ \overrightarrow{Q_sO} = (2,-1,-2) \end{array}\right\} \to \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -x + 8y - 5z = 0$$

Por tanto, la recta t es:

$$t: \left.\begin{array}{r} 4x + 2y - z = 0 \\ -x + 8y - 5z = 0 \end{array}\right\}$$

b) Buscamos un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular a los vectores $\vec{u_r}$ y $\vec{v_s}$.

$$\left.\begin{array}{r} (a,b,c)\cdot(-2,2,-4) = -2a + 2b - 4c = 0 \\ (a,b,c)\cdot(3,1,1) = 3a + b + c = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a = -\frac{3}{4}\lambda \\ b = \frac{5}{4}\lambda \\ c = \lambda \end{cases}$$

Por ejemplo, un vector que cumple esta condición es $\vec{n} = (-3, 5, 4)$.

La recta perpendicular común a r y a s es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a r y tiene por vector director $\vec{n}$, y π' el plano que contiene a s y tiene por vector director $\vec{n}$.

$$\pi: \left.\begin{array}{r} P_r(-1,2,0) \\ \vec{u_r} = (-2,2,-4) \\ \vec{n} = (-3,5,4) \end{array}\right\} \to \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -2 & 2 & -4 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 28x + 20y - 4z - 12 = 0$$

$$\to \pi: 7x + 5y - z - 3 = 0$$

$$\pi': \left.\begin{array}{r} Q_s(2,-1,-2) \\ \vec{v_s} = (3,1,1) \\ \vec{n} = (-3,5,4) \end{array}\right\} \to \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -x - 15y + 18z + 23 = 0$$

Por tanto, la recta perpendicular común a la recta r y s es:

$$\left.\begin{array}{r} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ -x - 15y + 18z + 23 = 0 \end{array}\right\}$$