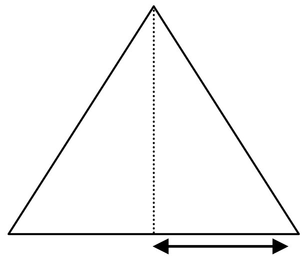
OPCIÓN A

Ejercicio 1. [2,5 puntos]

Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitud *x* y 100 − *x*. Con el de longitud *x* se forma un triángulo equilátero, y con el otro un cuadrado. Sea *f*(*x*) la suma de las áreas. ¿Para qué valor de dicha suma es mínima?



Tendremos que cada lado del triángulo será $\frac{x}{3}$, y del cuadrado $\frac{100-x}{4}=25-\frac{x}{4}$.

Por lo tanto el área del triángulo será $A=\frac{b\cdot h}{2}$.

La altura, por Pitágoras, será:

$h=\sqrt{\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{36}}=\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{36}}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$. El área $A=\dfrac{\frac{x}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{72}x^2$

Para el cuadrado el área será $A=\left(25-\frac{x}{4}\right)^2$

Si consideramos $f(x)=\left(25-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{72}x^2$, para que la suma de las áreas sea mínima debemos hallar los extremos derivando e igualando a cero:

$$f'(x)=\left(\left(25-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{72}x^2\right)'=\frac{-2}{4}\left(25-\frac{x}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{36}x=x\left(\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{1}{8}\right)-\frac{25}{2}=0\Rightarrow x\cong 72{,}2\ m$$

Comprobamos con la derivada segunda que se trata de un mínimo:

$f''(x)=\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{1}{8}>0$. Se trata de un mínimo.

Ejercicio 2. [2,5 puntos]

Determinar la función *f* tal que $f'(x) = \dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$ y con *f*(1) = 2.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}dx$$

Efectuamos la división $\dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$ y ponemos el resultado como $\dfrac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \dfrac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

Por lo tanto $\dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + x} = x^2 - x + 1 + \dfrac{1}{x^2 + x}$.

$$\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}dx = \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{1}{x^2 + x}dx$$

Como $\dfrac{1}{x^2 + x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$:

$$\int \frac{1}{x^2 + x}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) + \text{cte}$$

Y la función queda $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + \ln x - \ln(x+1) + \text{cte}$

Para hallar la constante tenemos en cuenta que *f*(1) = 2:

$$f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 + \text{cte} = 2 \to \text{cte} = \frac{7}{6} + \ln 2$$

Ejercicio 3. [2,5 puntos]

a) [1,5 puntos] Determinar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades del mismo.

b) [1 punto] Probar que el punto $P(1, 1, 2)$ pertenece a π, y calcular la recta perpendicular a π que pasa por P.

a) Los planos paralelos al plano $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$ tendrán el mismo vector normal. Es decir: $\vec{n}_\pi = (12,\ 3,\ 4)$

Tendremos dos planos paralelos al dado que estarán situados a una distancia de 6 unidades, y que tendrán la forma $\pi_{1,2} \equiv 12x + 3y - 4z + d = 0$

Si la distancia ha de ser 6, entonces, tomando como punto del plano π el dado por $x = 0$, $z = 0$, $y = \frac{7}{3}$, es decir, $\left(0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)$

$$d(P_\pi, \pi_{1,2}) = \frac{\left|12 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{7}{3} - 4 \cdot 0 + d\right|}{\sqrt{12^2 + 3^3 + 4^2}} = \frac{|7 + d|}{\sqrt{12^2 + 3^3 + 4^2}} = \frac{|7 + d|}{13} = 6 \Rightarrow |7 + d| = 78 \to \begin{cases} d = 71 \\ d = -85 \end{cases}$$

Por lo tanto los dos planos pedidos serán: $\pi_1 \equiv 12x + 3y - 4z + 71 = 0$, $\pi_2 \equiv 12x + 3y - 4z - 85 = 0$.

b) $P(1, 1, 2)$ pertenece al plano $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$, ya que si sustituimos las coordenadas del punto en el plano la ecuación se cumple: $12 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 7$

Calculamos la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 2)$ y es perpendicular al plano π:

El vector director de la recta será el vector normal del plano: $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (12,\ 3,\ -4)$.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 12\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 - 4\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4. [2,5 puntos]

Discutir, y resolver en los casos que sea posible, el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + y - z = 1} \\ \boldsymbol{x + 2y + z = 2} \\ \boldsymbol{x + 3y - z = 0} \end{cases}$$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Calculamos $|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - 5a = 0 \Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{5}$.

Estudiamos los rangos en función del valor de *a*:

Para $a \neq \dfrac{1}{5}$ tenemos que rg (*M*) = rg (*M'*) = 3. El sistema es compatible determinado.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{1-5a} = \frac{9}{5a-1}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2a-4}{5a-1}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6a-3}{5a-1}$$

Para $a = \dfrac{1}{5}$ si sustituimos en el sistema tenemos $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$, $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{5} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de un menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego rg(*M*) = 2.

Por otro lado $\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{9}{5} \neq 0$. Por lo que rg(*M'*) = 3

Luego rg (*M*) ≠ rg(*M'*). El sistema es incompatible.