EJERCICIOS RESUELTOS DE INECUACIONES

A. Inecuaciones lineales con una incógnita

a) $\frac{x-2}{3}-\frac{x-1}{4}>\frac{x-3}{2}-1$

Solución:

$$\frac{x-2}{3}-\frac{x-1}{4}>\frac{x-3}{2}-1\Rightarrow\frac{4(x-2)}{12}-\frac{3(x-1)}{12}>\frac{6(x-3)}{12}-\frac{12}{12}\Rightarrow 4x-8-3x+3>6x-18-12\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -5x>-25\Rightarrow x<5\Rightarrow \boxed{x\in(-\infty,5)}$$

B. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

a) $x^2-8x+12\leq 0$

Solución:

Obtenemos las raíces de $x^2-8x+12=0$ con dos fines: Primero, factorizar el polinomio que aparece en el primer miembro y segundo, determinar las tres zonas a estudiar para las que se verifica la inecuación:

$$x^2-8x+12=0\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 12}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}x_1=6\\x_2=2\end{cases}\text{, por lo que:}$$

$$x^2-8x+12\leq 0\Rightarrow (x-2)(x-6)\leq 0$$

Estos dos puntos determinan tres zonas: los valores menores o iguales que 2, los valores comprendidos entre 2 y 6, ambos incluidos, y los valores mayores o iguales que 6. Veamos en cuáles de estas tres zonas se satisface la inecuación:

	zona 1 $(-\infty,2]$	zona 2 $[2,6]$	zona 3 $[6,\infty)$
$(x-2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-6)$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-6)$	$+$	$-$	$+$

Conclusión:

Sólo la zona 2 satisface la ecuación, es decir, la solución final es: $\boxed{x\in[2,6]}$

C. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

a) $\left.\begin{array}{l}\frac{4x-1}{3}-\frac{x}{2}\geq 5\\ \frac{x-5}{3}+\frac{x}{2}>1\end{array}\right\}$

Solución:

Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\frac{4x-1}{3}-\frac{x}{2}\geq 5\Rightarrow 8x-2-3x\geq 30\Rightarrow 5x\geq 32\Rightarrow x\geq\frac{32}{5}\Rightarrow x\in\left[\frac{32}{5},\infty\right)$

a.2 $\frac{x-5}{3}+\frac{x}{2}>1\Rightarrow 2x-10+6x>6\Rightarrow 8x>16\Rightarrow x>2\Rightarrow x\in(2,\infty)$

Conclusión:

$$x \in \left[\frac{32}{5}, \infty\right) \cup x \in (2, \infty) \Rightarrow \boxed{x \in \left[\frac{32}{5}, \infty\right)}$$

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2} - 2x > \dfrac{5x-3}{3} - 2 \\ \dfrac{x-2}{3} + 1 < \dfrac{x+3}{2} + x \end{array}\right\}$

Solución:

Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\dfrac{x+3}{2} - 2x > \dfrac{5x-3}{3} - 2 \Rightarrow 3x + 9 - 12x > 10x - 6 - 12 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{27}{19}\right)$

a.2 $\dfrac{x-2}{3} + 1 < \dfrac{x+3}{2} + x \Rightarrow 2x - 4 + 6 < 3x + 9 \Rightarrow x \in (-1, \infty)$

Conclusión:

$$x \in x \in \left(-\infty, \frac{27}{19}\right) \cup x \in (-1, \infty) \Rightarrow \boxed{x \in \left(-1, \frac{27}{19}\right)}$$

D. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

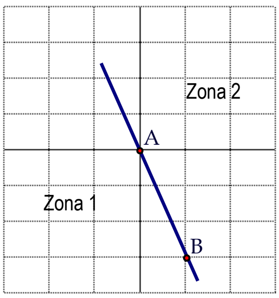
a) $x + 3y \leq 0$

Solución:

Se representa la recta $x + 3y = 0$ y luego se estudia en cuál de las dos regiones que determina la recta se satisface la inecuación:

Obtención de dos puntos para hacer la representación de la recta:

Si **x** es cero entonces **y** también lo es, por lo que un punto es A(0,0). Por otro lado, si y=1 entonces x=-3, luego otro punto es B(1,-3)



Ahora elegimos un "punto prueba" cualquiera de una de las dos regiones del plano que determina la recta, por ejemplo el C(1,1) y lo sustituimos en la inecuación:

$$1 + 3 \cdot 1 \leq 0$$

Obviamente no se satisface para ese punto.

Conclusión:

La solución de la inecuación es la zona 1. Decir también, que la recta está incluida en la solución de la inecuación debido al signo $\leq$.

E. Inecuaciones de valor absoluto

a) $|1 - 3x| < 5$

Solución:

La resolución de la inecuación de valor absoluto implica resolver realmente dos inecuaciones. La solución final es la unión de las soluciones.

a.1 $1-3x<5 \Rightarrow -3x<4 \Rightarrow x>-\frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{4}{3},\infty\right)$

a.2 $-(1-3x)<5 \Rightarrow 1-3x>-5 \Rightarrow -3x>-6 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x \in (\infty,2)$

Conclusión final:

$x \in \left(-\frac{4}{3},2\right)$

F. Inecuaciones racionales

a) $\frac{1}{x+1} \le 1+\frac{2}{x-1}$

Solución:

$$\frac{1}{x+1} \le 1+\frac{2}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x+1}-1-\frac{2}{x-1} \le 0 \Rightarrow \frac{x-1-(x+1)(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \le 0 \Rightarrow \frac{-x^2-x-2}{(x+1)(x-1)} \le 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-x^2-x-2}{(x+1)(x-1)} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x-1)} \ge 0$$

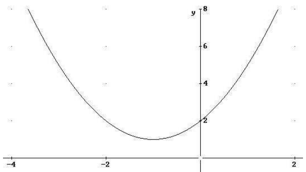
Esta inecuación racional se satisface de simultáneamente de dos formas:

a.1 Cuando el numerador y el denominador son positivos.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+2 \ge 0 \\ (x+1)(x-1)>0 \end{array}\right\}$$

- Solución para $x^2+x+2 \ge 0$:

  La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones. Además el valor del coeficiente **a** es positivo. Ello quiere decir que $y=x^2+x+2$ nunca corta al eje x, y que está siempre por encima de él, tal como se muestra en la gráfica. Así que la inecuación se verifica para todos los valores de x, es decir, $x \in (-\infty,\infty)$



Sea cual sea el valor de x, x^2+x+2 va a ser mayor que cero

- Solución para $(x+1)(x-1)>0$:

	zona 1 $(-\infty,-1)$	zona 2 $(-1,1)$	zona 3 $(1,\infty)$
$(x+1)$	–	+	+
$(x-1)$	–	–	+
$(x+1)(x-1)$	+	–	+

Entonces, los intervalos que satisface la inecuación son $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

- **La solución del sistema es la intersección de ambos sistemas:**

  $x \in (-\infty,\infty) \cup \{x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)\} \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

a.2 Cuando el numerador como el denominador son negativos.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+2 \le 0 \\ (x+1)(x-1)<0 \end{array}\right\}$$

- La inecuación $x^2+x+2 \le 0$ no se satisface jamás, así que para ella no hay solución. No hace falta tomarse la molestia de estudiar $(x+1)(x-1)<0$ por lo que sigue:

  Como en este sistema de dos ecuaciones una de ellas no posee solución, entonces, recordando que la solución del sistema es la intersección de las soluciones correspondientes a las dos ecuaciones, podemos afirmar que el sistema no tiene solución.

Conclusión final:

La solución de la ecuación racional $\frac{1}{x+1} \leq 1 + \frac{2}{x-1}$ viene dada por la unión de las soluciones de los sistemas que hemos estado discutiendo, y es: $\boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)}$

G. Otras inecuaciones

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + 5x - 6 < y \\ x + y < -2 \end{array}\right\}$

Solución:

Hay que representar las dos ecuaciones y estudiar las zonas que determinan:

a.1 Estudio de $x^2 + 5x - 6 < y$

- Representamos gráficamente $x^2 + 5x - 6 = y$, dando para ello los siguientes pasos:

  - Estudio de la orientación de la parábola.

    Hay que fijarse en el signo de **a**, que es el coeficiente de x^2. Si **a** es mayor que cero, como es en nuestro caso (**a**=1) entonces la parábola es de la forma $\cup$. Si **a** es menor que cero, la parábola es de la forma $\cap$**.**

  - Obtención de los puntos de corte con el eje X.

    Los puntos de corte con el eje X están dados por la condición y=0, es decir:

    $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

  - Obtención del punto de corte con el eje Y.

    El punto de corte con el eje X está dado por la condición x=0, es decir:

    $x^2 + 5x - 6 = y \overset{x=0}{\Rightarrow} y = -6$

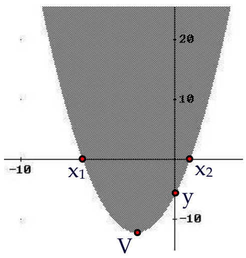
  - Obtención del las coordenadas del vértice V(x,y).

    Las coordenadas del vértice están dadas por $x = -\frac{b}{2a}$; $y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

    De $x^2 + 5x - 6 = y$ se sabe que $a = 1$, $b = 5$ y $c = -6$. Sustituimos estos valores en la expresiones que nos dan las coordenadas:

    $x = -\frac{5}{2 \cdot 1} = -\frac{5}{2}$, $y = \frac{-5^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-6)}{4 \cdot 1} = -\frac{49}{4}$, por lo que el vértice es $V(x,y) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right)$

  - Llevamos toda esta información al plano:

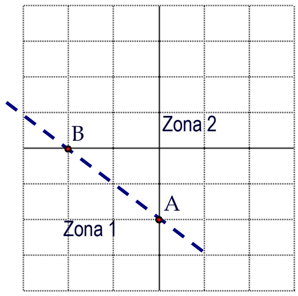


La solución está en el interior de la parábola, ya que sólo los puntos de esa zona verifican la inecuación. La parábola no está contenida en la solución debido al signo $<$ de la inecuación.

a.2 Estudio de $x + y < -2$

- Representamos gráficamente $x + y = -2$ y estudiamos en qué zona del plano, de las dos que determina la recta, se satisface la inecuación:

- Obtenemos dos puntos cualesquiera: Si x es cero entonces y es -2, por lo que un punto es A(0,-2). Por otro lado, si y=0 entonces x=-2, luego otro punto es B(-2,0).
- Representamos la recta en el plano e indicamos las dos regiones que determina:

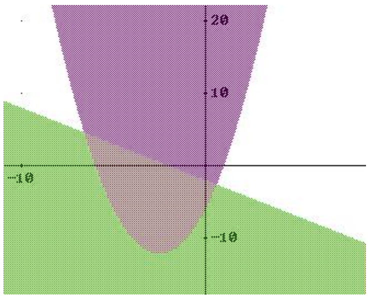


- Elegimos un punto cualquiera de alguna de las dos zonas y lo llevamos a la inecuación para ver si la verifica. Tomamos, por ejemplo el punto C(0,0):

$$0+0<-2$$

Esto es falso. Entonces, la solución de la inecuación es la zona 1. Además la recta no está contenida en la solución debido al signo $<$.

a.3 Llevamos todo lo obtenido al plano. **La solución** es la zona intersección de las dos gráficas anteriores.



****