REPASO FUNCIONES 2º bachillerato mayo 2014

Representación de funciones polinómicas y racionales

$a)\ f(x) = x^4 - 8x^2 + 7 \qquad b)\ f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2} \qquad c)\ f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$

Soluciones Web

Representación de funciones de valor absoluto y definidas a trozos:

1 Representa las siguientes funciones con valor absoluto.

a) $f(x) = 4x + \left|-x^2 - 18x\right|$ b) $g(x) = \left|x^3 + 2x^2 - 6x\right|$

2 Representa esta función: $f(x) = \begin{cases} \left|-x^2 - 3x\right| & \text{si } x \leq 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \ln(x^2 - 4) & \text{resto} \end{cases}$

4 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

5 Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$, con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de f.
Esbozar la gráfica de f.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Problema 2)

6 Sea f la función dada por $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.
b) Determínense los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.
c) Esbócese la gráfica de f.

(Castilla y León. Septiembre 2004. Prueba A. Problema 2)

7 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.
b) Represente gráficamente la función.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 6)

Representa las siguientes funciones con valor absoluto.

a) $f(x) = 4x + |-x^2 - 18x|$ b) $g(x) = |x^3 + 2x^2 - 6x|$

a) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 18x & \text{si } -x^2 - 18x \geq 0 \\ 4x + x^2 + 18x & \text{si } -x^2 - 18x < 0 \end{cases}$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 14x & \text{si } x \in [-18, 0] \\ x^2 + 22x & \text{si } x \in (-\infty, -18) \cup (0, +\infty) \end{cases}$

Se trata de representar dos parábolas en sus respectivos intervalos.

Puntos de intersección:

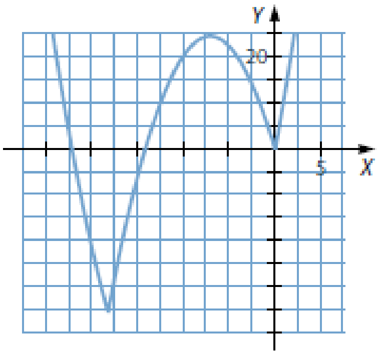
$-x^2 - 14x = x^2 + 22x \rightarrow 2x^2 + 36x = 0 \rightarrow x(2x + 36) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -18 \end{cases}$

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x = -18 \rightarrow y = -72 \rightarrow (-18, -72)$

Vértice de $f(x) = -x^2 - 14x \rightarrow (-7, 49)$

Vértice de $f(x) = x^2 + 22x \rightarrow (-11, -121)$



b) Estudiamos primero la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$ y tras representarla, dibujamos las partes negativas como positivas haciendo una simetría respecto del eje X.

Dominio $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

  $x^3 + 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{22}}{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2{,}23 \\ x = 0{,}9 \end{cases}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2 - \sqrt{22}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{-2 + \sqrt{22}}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2 - \sqrt{22}}{3}, \dfrac{-2 + \sqrt{22}}{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -2{,}23 \rightarrow f(-2{,}23) = 12{,}24 \rightarrow (-2{,}23;\ 12{,}24)$ Máximo

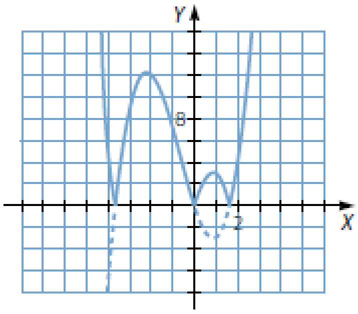
$x = 0{,}9 \rightarrow f(0{,}9) = -3{,}05 \rightarrow (0{,}9;\ -3{,}05)$ Mínimo

$f''(x) = 6x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3} = -0{,}67$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{-2}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = \dfrac{-2}{3} \rightarrow f\left(\dfrac{-2}{3}\right) = \dfrac{124}{27} = 4{,}59$

$\rightarrow \left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{124}{27}\right)$ Punto de inflexión



Representa esta función: $f(x) = \begin{cases} |-x^2 - 3x| & \text{si } x \leq 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Representamos $f(x) = -x^2 - 3x$ en el intervalo $(-\infty, 0]$.

  Se trata de una parábola de vértice $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$.

  Cortes en el eje X: $-x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-3, 0)$

  Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

  En $(-\infty, -3)$ la función es negativa, por lo que para conseguir el valor absoluto, dibujamos la simétrica respecto al eje X.

- Representamos $f(x) = -e^x$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

  No corta al eje X.

  Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -e^0 = -1 \rightarrow (0, -1)$

  No tiene asíntotas verticales.

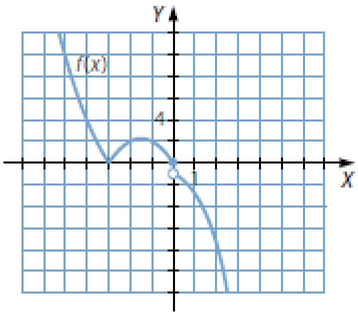
  $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-e^x}{x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

  $f'(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

  $f''(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



Representa la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \ln(x^2-4) & \text{resto} \end{cases}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow (0, 0), \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \ln(x^2-4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2-4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2-4) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^2-4)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

- Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$

- Crecimiento:

  $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{2x}{x^2-4} & \text{resto} \end{cases}$

  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

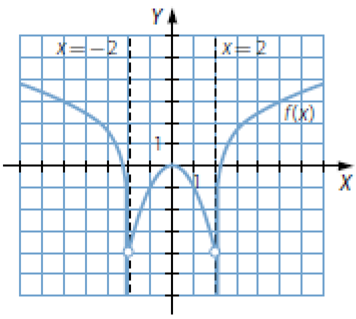
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo

- Concavidad:

  $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} & \text{resto} \end{cases}$

- En $(-2, 2) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\mathbb{R} - (-2, 2) \rightarrow f''(x) = \dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



Representa la función: $f(x)=\begin{cases} e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x<1 \\ x^2-x+1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

$f(x)=e^{\sqrt{-x}} \rightarrow$ Está definida para $x\leq 0 \rightarrow \text{Dom } f=(-\infty, 0]\cup[1,+\infty)$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x=0\rightarrow y=e^{\sqrt{0}}=1\rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\sqrt{-x}}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{x}\rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}}\rightarrow\dfrac{\infty}{\infty} \\ \qquad\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\sqrt{-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}}{\dfrac{-2}{2\sqrt{-x}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{-x}}=-\infty\end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x+1=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\sqrt{-x}}=+\infty$

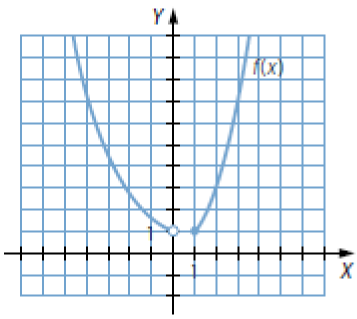
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}\cdot e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x<1 \\ 2x-1 & \text{si } x>1\end{cases} \qquad f'(x)=0\rightarrow x=\frac{1}{2}$$

- En $(-\infty, 0)\rightarrow f'(x)<0\rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1,+\infty)\rightarrow f'(x)>0\rightarrow f(x)$ creciente

$$f''(x)=\begin{cases} e^{\sqrt{-x}}-\dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x>1\end{cases} \qquad f''(x)=0\rightarrow x=-1$$

- En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\rightarrow f''(x)>0\rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-1, 0)\rightarrow f''(x)<0\rightarrow f(x)$ convexa

$x=-1\rightarrow f(-1)=e\rightarrow(-1, e)$ Punto de inflexión



Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$, con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de *f*. Esbozar la gráfica de *f*.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Problema 2)

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x} = 0 \rightarrow -x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 1$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa.}$$

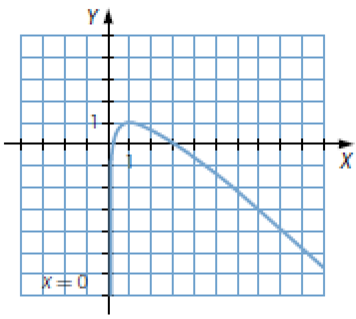
No presenta puntos de inflexión.

$$\lim_{x \to 0^+} (2 - x + \ln x) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x) = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x + \ln x}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x + x) = \lim_{x \to +\infty} (2 + \ln x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (2 - x + \ln x) = -\infty$



Sea f la función dada por $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.

b) Determínense los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.

c) Esbócese la gráfica de f.

(Castilla y León. Septiembre 2004. Prueba A. Problema 2)

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^2 + 3h + 2 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} (h+3) = 3 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^2 - 3h + 2 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} (h-3) = -3 \end{array}\right\}$$

$\to$ No es derivable en $x = 0$.

b) En $(-\infty, 0) \to f'(x) = 2x + 3 = 0 \to x = \dfrac{-3}{2}$

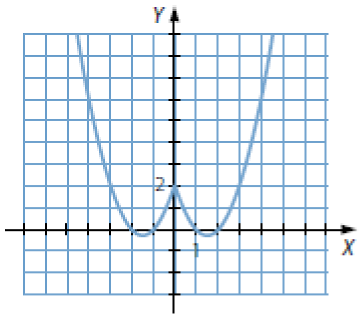
- En $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $[0, +\infty) \to f'(x) = 2x - 3 = 0 \to x = \dfrac{3}{2}$

- En $\left(0, \dfrac{3}{2}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

En $x = \pm\dfrac{3}{2}$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

c)



Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.

b) Represente gráficamente la función.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 6)

a) Dom $f = \mathbb{R}$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.ç

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$, un máximo.

b) La función corta a los ejes en el punto (0, 0).

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x+1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.