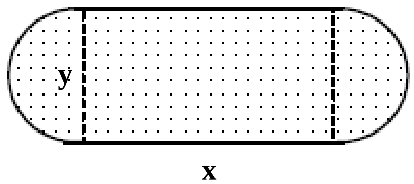
Junio 2009

PR-2.- Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consiste en un rectángulo y dos semicírculos en dos lados opuestos, según la figura adjunta. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible. (3 puntos)



El perímetro del campo es:

$$P = 2x + 2\pi\frac{y}{2} \Rightarrow 2x + \pi y = 400 \Rightarrow x = \frac{400 - \pi\cdot y}{2}$$

La superficie de la parte rectangular es:

$$S = xy \longrightarrow \text{(sustituyendo el valor de x)} \Rightarrow S = \frac{400 - \pi\cdot y}{2}\cdot y = \frac{400y - \pi\cdot y^2}{2}$$

Esta superficie será máxima en la solución de $S' = 0$ que haga negativa a S''.

$$S' = \frac{400 - 2\pi\cdot y}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{200}{\pi}$$

Como $S'' = \frac{-2\pi}{2} = -2$ es negativo, para el valor de x hallado se da el área máxima buscada.

Para $y = \frac{200}{\pi} \Rightarrow x = \frac{400 - \pi\cdot\frac{200}{\pi}}{2} = 100$. Por tanto, el rectángulo central tiene por dimensiones x = 100 e $y = \frac{200}{\pi}$.

C-3.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **en su dominio de definición. (1 punto)**

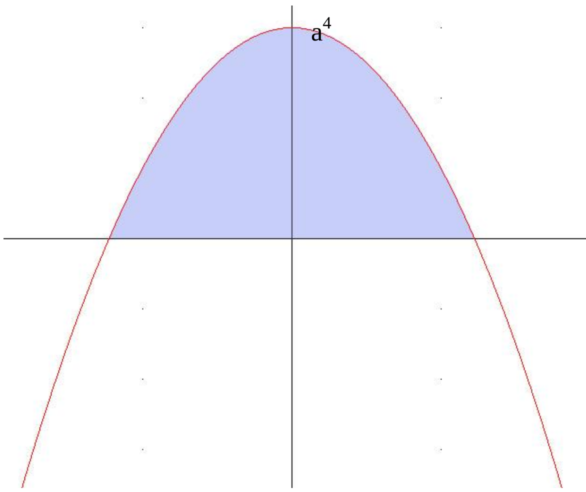
La función no estará definida para x =0, ya que hace al denominador 0, y para los valores negativos de x. Luego el dominio serán todos los valores de x tales que x>0

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

f '(x)			+		–
f(x)	No definida	0	↗	e	↘

f(x) es creciente en el intervalo (0, e) y decreciente en (e, ∞). Presenta un máximo en x = e.

C-4.- Calcular los valores de *a* para los cuales el área comprendida entre la gráfica de la función $y = -x^2 + a^4$ y el eje *OX* es de 256/3 unidades de superficie. (1 punto)



La función es par, por lo que es simétrica respecto al eje x. Los límites de integración coincidirán con los cortes con el eje x.

El corte con el eje y será a^4.

Puntos de corte con x: $y = -x^2 + a^4 = 0$, luego $x = \pm a^2$

Por lo tanto los límites de integración serán $\pm a^2$

Calculamos $\int_{-a^2}^{a^2} (-x^2 + a^4)\, dx = \left| \frac{-x^3}{3} + a^4 x \right|_{-a^2}^{a^2} = \frac{-a^6}{3} + a^4 a^2 - \left(\frac{a^6}{3} - a^4 a^2 \right) = \frac{-2a^6}{3} + 2a^6 = \frac{4a^6}{3}$

$$\frac{4a^6}{3} = \frac{256}{3} \rightarrow a^6 = 64 \rightarrow a = \sqrt[6]{2^6} \rightarrow a = 2$$

La función resultante que cumple las características del enunciado es $y = -x^2 + 16$

Sept 2009

PR-1.- Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

a) Hallar su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica **(2 puntos)**

b) Calcular el valor de $\int_0^1 f(x)\,dx$. **(1 punto)**

a)

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{No hay solución} \Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+3)x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)>0\Rightarrow\frac{(x^2+3)x^2}{(x^2+1)^2}>0\Rightarrow\begin{cases} x^2+3>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ (x^2+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}\Rightarrow \text{Creciente}\Rightarrow\forall x\in\Re$$

No hay máximos ni mínimos relativos

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)-4x\cdot(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{4x^5+6x^3+4x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(3-x)(3+x)}{(x^2+1)^3}$$

$$\text{Concavidad}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow\frac{2x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x^2+1)^3}>0\Rightarrow\begin{cases} 2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x>0\Rightarrow\forall x\in\Re/x>0 \\ \sqrt{3}-x>0\Rightarrow x<\sqrt{3}\Rightarrow\forall x\in\Re/x<\sqrt{3} \\ 3+x>0\Rightarrow x>-3\Rightarrow\forall x\in\Re/x>-\sqrt{3} \\ (x^2+1)^3>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ … -3	-3 … 0	0 … 3	3 … ∞
2 > 0	(+)	(+)	(+)	(+)
x > 0	(-)	(-)	(+)	(+)
x > - 3	(-)	(+)	(+)	(+)
x < 3	(+)	(+)	(+)	(-)
$(x^2+1)^3 > 0$	(+)	(+)	(+)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)	(-)

Concavidad $\forall x\in\Re/(x<-\sqrt{3})\cup(0<x<\sqrt{3})$

Convexidad $\forall x\in\Re/(-\sqrt{3}<x<0)\cup(x>\sqrt{3})$

Puntos de Inflexión

En $x=-3 \Rightarrow f(-3)=\dfrac{(-3)^3}{(-3)^2+1}=\dfrac{-27}{9+1}=-\dfrac{27}{10} \Rightarrow \left(-3\,,-\dfrac{27}{10}\right)$

En $x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{0^3}{0^2+1}=\dfrac{0}{0+1}=0 \Rightarrow (0\,,0)$

En $x=3 \Rightarrow f(3)=\dfrac{3^3}{3^2+1}=\dfrac{27}{9+1}=\dfrac{27}{10} \Rightarrow \left(3\,,\dfrac{27}{10}\right)$

<u>Asíntotas</u>

No las hay verticales

Horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{0+0}=\frac{1}{0}\Rightarrow \textit{No existe cuando } x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x^2+1}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=-\frac{1}{0+0}=-\frac{1}{0}\Rightarrow$$

No existe cuando $x\to-\infty$

Oblicuas o inclinadas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+0}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

Existe asíntota oblicua $y=x$ *cuando* $x\to\infty$

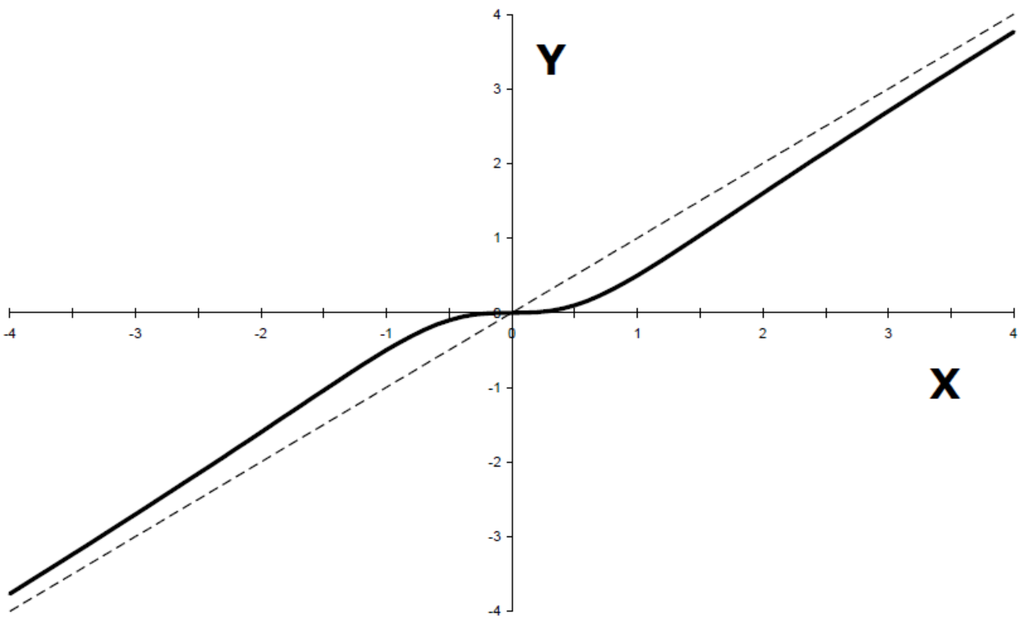
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{-x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x^3}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{-1-\frac{1}{x^2}}=\frac{-1}{-1-0}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

Existe asíntota oblicua $y=x$ *cuando* $x\to-\infty$

Gráfica de la función



b

$$\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}\,dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1-\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)-\frac{1}{2}\cdot\left[\ln t\right]_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\ln 2-\ln 1)$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 1+x^2 \\ \hline -x^3-x & x \\ \quad -x & \end{array}$$

$$1+x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt\Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1+0^2=1\\ x=1\Rightarrow t=1+1^2=2\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

C-1.- Calcular el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(2^{\operatorname{sen} x}\right)}{e^x-1}$ **(1 punto)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(2^{\operatorname{sen} x}\right)}{e^x-1}=\frac{\ln\left(2^{\operatorname{sen} 0}\right)}{e^0-1}=\frac{\ln\left(2^{0}\right)}{1-1}=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2^{\operatorname{sen} x}}\cdot 2^{\operatorname{sen} x}\cdot\ln 2\cdot\cos x}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2\cdot\cos x}{e^x}=\frac{\ln 2\cdot\cos 0}{e^0}=\frac{\ln 2\cdot 1}{1}=\ln 2$$

C-2.- Hallar los puntos en donde la recta tangente a la gráfica de la función **f(x) = x³** es paralela a la recta de ecuación **y = 3x +2** **(1 punto)**

$$\begin{cases} f'(x)=3x^2 \\ m=3\end{cases}\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow f(1)=1^3\Rightarrow(1\,,1) \\ x=-1\Rightarrow f(-1)=(-1)^3\Rightarrow(-1\,,-1)\end{cases}$$

PR-2.- Sea la función $f(x)$ = sen(x) + cos(x) , definida en el intervalo [0, 2π].
a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos. Esbozar su gráfica. (2 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas de ecuaciones x = 0, x = π/4, e y = 2. (1 punto)

a) Se hacen las derivadas primera y segunda:

$$f'(x)=\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\,;\qquad f''(x)=-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)$$

Calculamos máximos y mínimos: $f'(x)=\cos(x)-\operatorname{sen}(x)=0\rightarrow\cos(x)=\operatorname{sen}(x)$

La derivada primera se anula, en el intervalo [0, 2π], cuando $x=\dfrac{\pi}{4}\ y\ \dfrac{5\pi}{4}$.

Comprobamos si se trata de máximos o mínimos estudiando el crecimiento y el decrecimiento de la función:

		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
f '(x)	+		−		+	
f(x)	↗		↘		↗	

Luego el punto x = $\dfrac{\pi}{4}$ es un máximo y el punto x = $\dfrac{5\pi}{4}$ un mínimo.

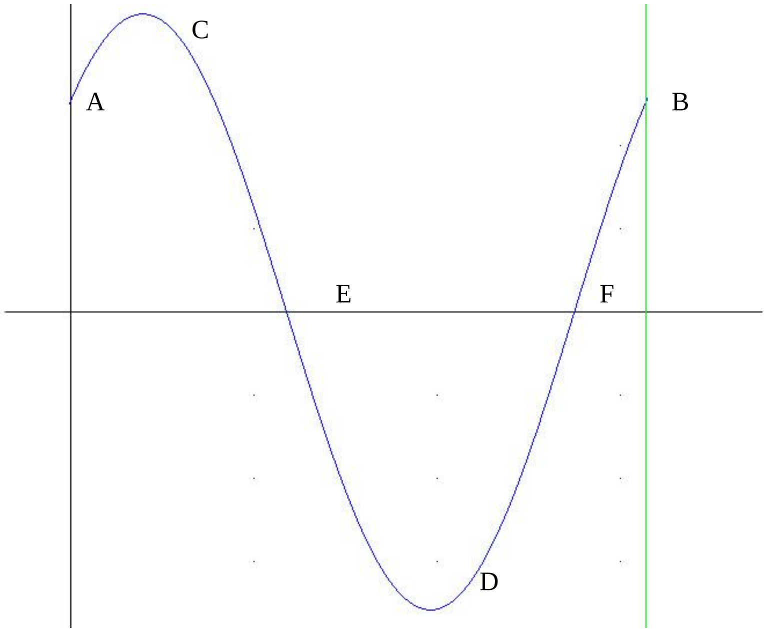
Para representar la función daremos algunos valores:

Valores: A (0, 1); B (2π, 1); C ($\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}$), D ($\dfrac{5\pi}{4},-\sqrt{2}$),

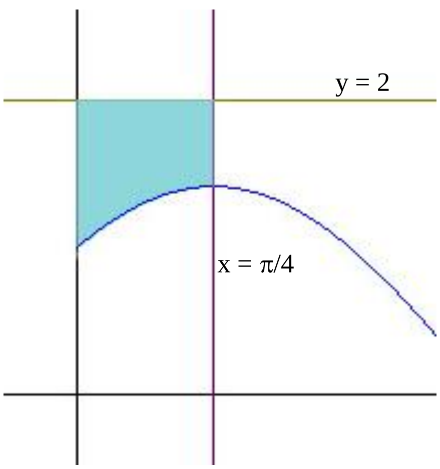
Calculamos los puntos de corte: $f(x)=\operatorname{sen}(x)+\cos(x)=0\rightarrow\operatorname{sen}(x)=-\cos(x)\rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}, x=\dfrac{7\pi}{4}$

Luego tendremos E ($\dfrac{3\pi}{4}$, 0); F ($\dfrac{7\pi}{4}$, 0);

La gráfica de la función será:



c) Representamos el área encerrada por las rectas y = 2, x = π/4 y la función f(x), obteniendo:



$$\int_0^{\pi/4}\left(sen(x)+\cos(x)\right)dx = \left|-\cos(x)+sen(x)\right|_0^{\pi/4} = 1$$

Luego el área coloreada será el área del rectángulo formado por la recta y = 2, x = π/4, y los ejes OX y OY, menos el área hallada anteriormente:

$A = 2\cdot\pi/4 - 1 = \pi/2 - 1 = 0{,}57\ u^2$

C-3.- Probar que la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene alguna solución. (1 punto)

Aplicaremos el teorema de Bolzano, según el cual "si f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b] y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces , con seguridad, corta al eje X en ese intervalo [a,b]."

Si $f(x) = x^{2009} - e^x + 2 = 0$, entonces f(0) = 1 y $f(-2) = -2^{2009} - 1/e^{2009} + 2$, que es claramente menor que 0.

Por lo tanto podemos asegurar que existe una solución en el intervalo [–2,0], ya que f(0)>0 y f(–2)<0.

C-4.- Calcular $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ **. (1 punto)**

Realizamos el cambio de variable siguiente:

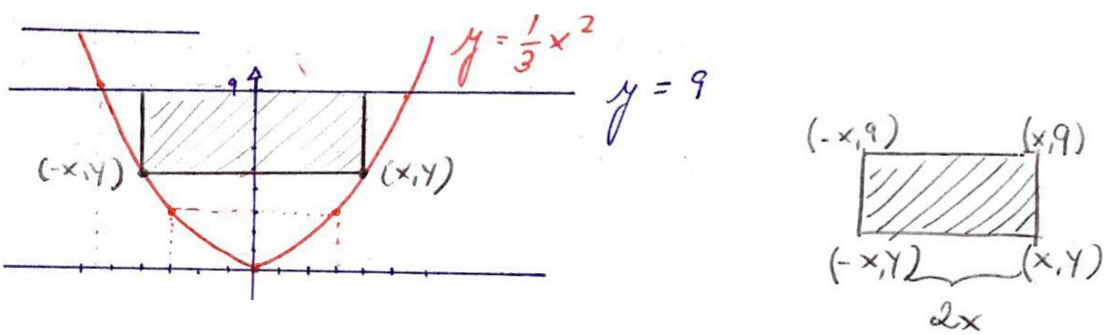
$$\begin{cases} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \to dx = 2t \cdot dt \end{cases}$$

Con lo que la integral queda $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{(1+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)} = 2arctg(t)$

Deshaciendo el cambio queda $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2arctg(\sqrt{x})$

Junio 2010

E1.- Dadas la parábola $y = \frac{1}{3}x^2$, y la recta **y = 9,** hallar las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima que tiene un lado en la recta y los otros dos vértices en la gráfica de la parábola **(2'5 puntos)**



$$A = 2x \cdot \left(9 - \frac{x^2}{3}\right) = 18x - \frac{2x^3}{3} \Rightarrow A' = \frac{dA}{dx} = 18 - \frac{6x^2}{3} = 18 - 2x^2 = 2 \cdot (9 - x^2) \Rightarrow$$

$$Si\ A' = 0 \Rightarrow 2 \cdot (9 - x^2) = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dx^2} = 2 \cdot (-2x) = -4x \Rightarrow A''(3) = -4 \cdot 3 = -12 \Rightarrow Màximo \Rightarrow A = 2 \cdot 3 \cdot \left(9 - \frac{3^2}{3}\right) = 6 \cdot 6 = 36\ u^2$$

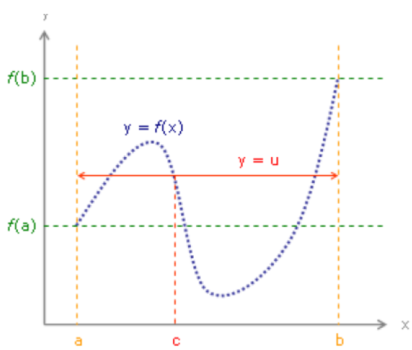
E2.- a) Si el termino independiente de un polinomio ***p(x)*** es **– 5** y el valor que toma ***p(x)*** para **x = 3** es **7, ¿**se puede asegurar que ***p(x)*** toma el valor **2** en algún punto del intervalo **[0 , 3]**. Razonar la respuesta y enunciar los resultados teóricos que se utilicen **(1'5 puntos)**

b) Calcular $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$ **(1 punto)**

a) **Si**, se puede asegurar, como también se puede asegurar que habrá un cero en ese intervalo

Teorema de Weierstrass es un teorema de análisis real que establece que una función continua en un intervalo cerrado y acotado (de números reales) alcanza sus valores máximo y mínimo en puntos del intervalo. También se puede enunciar en términos de conjuntos compactos. El teorema establece que una función continua transforma intervalos compactos en intervalos compactos, entendiéndose por intervalo compacto aquel que es cerrado (sus puntos frontera le pertenecen) y acotado.

De este teorema se deriva el teorema del valor intermedio que determina que si *f* una función continua en un intervalo [*a*,*b*] y supongamos que *f*(*a*) < *f*(*b*). Entonces para cada *u* tal que *f*(*a*) < *u* < *f*(*b*), existe un *c* dentro de (*a*,*b*) tal que *f*(*c*) = *u*. La misma conclusión se obtiene para el caso que *f*(*b*) < *f*(*a*). En nuestro caso *p(0) = -5 < p(3) = 7,* entonces como *p(0) < 2 < p(3),* existe un valor *c* dentro de *(0 , 3)* tal que *p(c) = 2*



$$b)\ \int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{dt}{1+t^2}dx = arc\ tg\ t = arc\ tg\ (\operatorname{sen} x) + K$$

$$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x\ dx = dt$$

E2.- Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, se pide

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad y las asíntotas **(1'5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitado por la gráfica de la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, el eje **OX** y las rectas **x = 2 , x = 4 (1 punto)**

$a)$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0} \Rightarrow Dom(f)=\forall x \in \Re-\{1\}$$

$$f'(x)=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)^2}>0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2<0 \Rightarrow x \in \Re \\ (x-1)^2>0 \Rightarrow x \in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$	1	∞
- 2 < 0	**(-)**	**(-)**
$(x - 1)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-) f'(x) < 0**	**(-) f'(x) < 0**

Decrecimiento $\forall x \in \Re /(x<1) \cup (x>1)$

$$f''(x)=-2\frac{-2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-4}{(x-1)^3} \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow \frac{-4}{(x-1)^3}>0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4<0 \Rightarrow x \in \Re \\ (x-1)^3>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x \in \Re / x>1 \end{cases}$$

	$-\infty$	1	∞
- 4 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 1	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+) f''(x) > 0**	**(-) f''(x) < 0**

Concavidad $\forall x \in \Re / x<1$ **Convexidad** $\forall x \in \Re / x>1$

<u>Asíntotas</u>

Verticales

x = 1 $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{2}{0^+}=\infty \end{cases}$

Horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

Asíntota horizontal $\Rightarrow y=1$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{-x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-1-\frac{1}{x}}=\frac{-1+\frac{1}{\infty}}{-1-\frac{1}{\infty}}=\frac{-1+0}{-1-0}=1$$

Asíntota horizontal $\Rightarrow y=1$ *cuando* $x\to-\infty$

Oblicuas o inclinadas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0+0}{1-0}=0$$

No existe Asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

No existe Asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

b)

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x+1}{x-1}}{x}=\frac{x+1}{x^2-x}\Rightarrow f(3)=\frac{3+1}{3^2-3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow \text{Zona positiva en } [2\,,4]$$

$$\text{Puntos de corte con los ejes}\Rightarrow\begin{cases}\text{Con } OX\Rightarrow y=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1\notin[2\,,4]\\ \text{Con } OY\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\frac{0+1}{0^2-0}=\frac{1}{0}\Rightarrow \text{Asíntota vertical}\Rightarrow x=0\notin[2\,,4]\end{cases}$$

$$A=\int_2^4\frac{x+1}{x^2-x}\,dx=\int_2^4\frac{2}{x-1}\,dx+\int_2^4\frac{-1}{x}\,dx=2\int_1^3\frac{1}{t}\,dt-[\ln x]_2^4=2\,[\ln x]_1^3-(\ln 4-\ln 2)=2\cdot(\ln 3-\ln 1)-\ln 2$$

$$x-1=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow t=1\\ x=4\Rightarrow t=3\end{cases}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}=\frac{Ax+Bx-B}{(x-1)x}\Rightarrow\begin{cases}-B=1\Rightarrow B=-1\\ A+B=1\Rightarrow A-1=1\Rightarrow A=2\end{cases}$$

$$A=\ln 9-\ln 2=\ln\frac{9}{2}$$

Junio 2011

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. (2 puntos)

b) Esbozar su gráfica. (0,5 puntos)

a) Existe una asíntota vertical en x = 1.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \infty$. Luego no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: Tendrá una asíntota ya que el grado del numerador es uno más que el del denominador, y será de la forma *y = mx + n*, donde $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right)$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - \frac{x^2 - x}{x - 1} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2x + 3}{x - 1} \right) = -2$$

Por lo tanto la asíntota será *y = x – 2.*
Los mismos cálculos sirven para el caso $x \to -\infty$

Hallamos los máximos y los mínimos relativos:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \to x_1 = 0, x_2 = 2$$

Para ver si son máximos o mínimos estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de la función considerando los extremos relativos y la asíntota vertical:

f'(x)	+		–		–		+
f(x)	↗	0	↘	1	↘	2	↗

Por lo tanto x = 0 es un máximo y x = 2 un mínimo.

Calculamos las ordenadas:
$f(0) = -3 \to (0,-3)$ Es un máximo
$f(2) = 1 \to (2,1)$ Es un mínimo

Para representar la función necesitaremos también conocer la concavidad y la convexidad:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3} = 0$$

No tiene solución, por lo que no habrá puntos de inflexión.

Estudiamos la evolución de la derivada segunda para estudiar la curvatura:

f''(x)	$-$		$+$
f(x)	$\cap$	1	$\cup$

La función no tiene raíces por lo que no cortará al eje de abscisas.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}=0 \rightarrow x^2-3x+3=0 \rightarrow \text{No existe solución real.}$$

Punto de corte con el eje de ordenadas: $f(0)=\frac{3}{-1}=-3 \rightarrow (0,-3)$

La gráfica de f será: