Regla de L`Hopital

ERCICIOS RESUELTOS

Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(5^{1/x} - 1)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x \ln 3}{3x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^2}{6x} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^3}{6} = \left(\frac{\infty}{6}\right) = +\infty$$

Vemos así, mediante la regla de L'Hôpital, que una función exponencial es un infinito de orden superior a una función potencia.

b) $$\lim_{x \to +\infty} x(5^{1/x} - 1) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{1/x} - 1}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot \ln 5}{-1/x^2} = \ln 5$$

c) Para poner $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos en $f(x) = (\cos 2x)^{3/x^2}$:

$$\lim_{x \to 0} \ln f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{3}{x^2} \ln(\cos 2x)\right] = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \to 0} \frac{3 \ln(\cos 2x)}{x^2} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot [(-\operatorname{sen} 2x)/(\cos 2x)] \cdot 2}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-6 \operatorname{tg} 2x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-6(1 + \operatorname{tg}^2 2x) \cdot 2}{2} = -6$$

$$\lim_{x \to 0} [\ln f(x)] = -6 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

---

54 S Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites, que son del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x + x^3)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{1 - \cos x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}\right)$

55 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg} x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\operatorname{cotg} 3x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

56 S Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}$