Ejercicios resueltos cónicas

Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz $r: x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist(P, F) = dist(P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

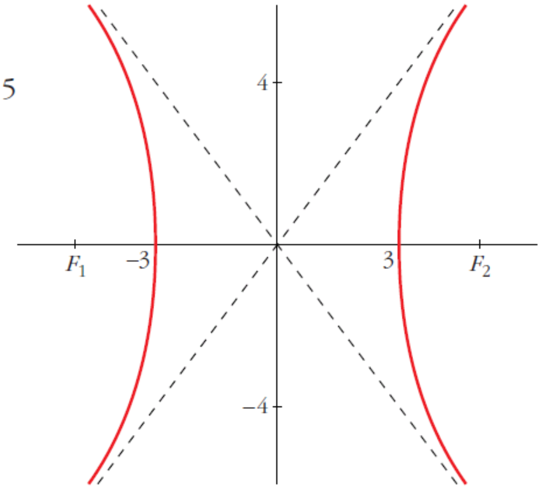
Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje: $k = 2a = 6 \quad \rightarrow \quad a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \quad \rightarrow \quad c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \quad \rightarrow$

  $\rightarrow \quad b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \quad \rightarrow \quad b = 4$
- Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$; $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



Escribe la ecuación de la elipse de focos $F(1, 1)$ y $F'(1, -1)$ y cuya constante es igual a 4.

De otra forma:

El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir:

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (1, 0)$$

Por otra parte:

$$2c = dist\,(F, F') = |\overrightarrow{F'F}| = |(0, 2)| = 2 \quad \rightarrow \quad c = 1$$

$$2a = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Ejercicios resueltos cónicas

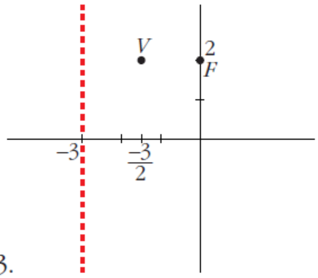
La parábola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentra su directriz.

$y^2 - 4y = 6x + 5 \;\rightarrow\; y^2 - 4y + 4 = 6x + 9 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (y-2)^2 = 6\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

El vértice de la parábola es $V\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Como el foco es $F(0, 2)$, entonces la directriz es $x = -3$.



Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas.

a) $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

d) $\dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-3)^2}{16} = 1$

Ejercicios resueltos cónicas

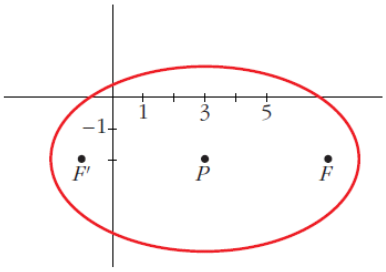
a) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5,\ \ b = 3,$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$

Los focos son $F(7, -2)$ y $F'(-1, -2)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

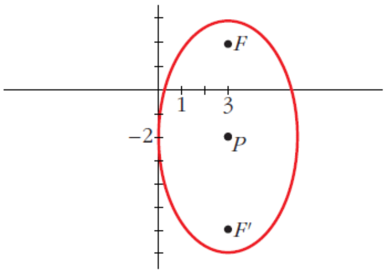


b) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5,\ \ b = 3,\ \ c = 4.$

Los focos son $F(3, 2)$ y $F'(3, -6)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$



c) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$a = 4,\ \ b = 2,\ \ c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

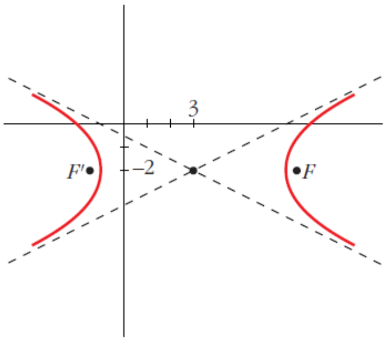
Los focos son:

$F(3 + 2\sqrt{5}, -2)$ y $F'(3 - 2\sqrt{5}, -2)$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3);\ \ y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$



d) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$b = 2,\ \ a = 4,\ \ c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

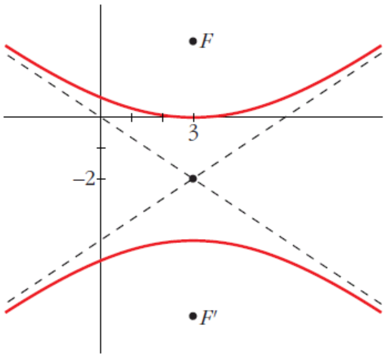
Los focos son:

$F(3, -2 + 2\sqrt{5})$ y $F'(3, -2 - 2\sqrt{5})$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3);\ \ y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$



Ejercicios resueltos cónicas

Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las cónicas siguientes:

a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9y^2 - 36y + 27 = 0$

a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$9x^2 - 36x + 36 + 16y^2 + 96y + 144 - 36 - 144 + 36 = 0$

$(3x - 6)^2 + (4y + 12)^2 - 144 = 0$

$[3(x - 2)]^2 + [4(y + 3)]^2 = 144$

$9(x - 2)^2 + 16(y + 3)^2 = 144$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Es una **elipse** de **centro** $(2, -3)$.

$a = 4,\ \ b = 3,\ \ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$

Vértices: $(6, -3)$; $(-2, -3)$; $(2, 0)$ y $(2, -6)$

Focos: $(2 + \sqrt{7}, -3)$ y $(2 - \sqrt{7}, -3)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 4y^2 - 1 - 3 = 0$

$(x - 1)^2 - 4y^2 = 4$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$$

Es una **hipérbola** de **centro** $(1, 0)$.

$a = 2,\ \ b = 1,\ \ c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

Vértices: $(3, 0)$ y $(-1, 0)$

Focos: $(\sqrt{5} + 1, 0)$ y $(-\sqrt{5} + 1, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

c) $x^2 + 9y^2 + 36x + 27 = 0$

$x^2 + 9(y^2 + 4y) + 27 = 0$

$x^2 + 9(y + 2)^2 - 36 + 27 = 0$

$x^2 + 9(y + 2)^2 = 9$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

Es una **elipse** con $a = 3,\ \ b = 1,\ \ c = \sqrt{8}$.

Vértices: $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$

Focos: $(-\sqrt{10}, 0)$, $(\sqrt{10}, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \approx 0{,}94$