**10.60. Aplicando la definición, calcula la derivada de las funciones siguientes en los puntos en los que estén definidas:**

**a)** $f(x) = x^3 - 5x$

**b)** $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

**c)** $f(x) = \sqrt{12-4x}$

**d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

a) $f(x) = x^3 - 5x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - 5(x+h) - x^3 + 5x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2-5)}{h} = 3x^2 - 5$$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, si $x \neq -2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{x+h+2}-\frac{3}{x+2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(x+h+2)(x+2)} = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

c) $f(x) = \sqrt{12-4x}$, si $x < 3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{12-4(x+h)}-\sqrt{12-4x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{12-4(x+h)}-\sqrt{12-4x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{12-4(x+h)}+\sqrt{12-4x}}{\sqrt{12-4(x+h)}+\sqrt{12-4x}} = \lim_{h\to 0}\frac{-4h}{h\left(\sqrt{12-4(x+h)}+\sqrt{12-4x}\right)} = \frac{-2}{\sqrt{12-4x}}$$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, si $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x+h}}{x+h+1}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)\sqrt{x+h}-(x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)\sqrt{x+h}-(x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)\sqrt{x+h}+(x+h+1)\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x+h}+(x+h+1)\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+1)^2-2x(x+1)+hx\right]}{h(x+h+1)(x+1)\left((x+1)\sqrt{x+h}+(x+h+1)\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-x+1}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$$

**10.70. (TIC) Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas:**

**a)** $f(x) = \left(\sqrt{x}+x\right)^5$

**b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3}}$

**c)** $f(x) = \left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^3$

**d)** $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-6)^4}$

a) $f'(x) = 5\left(\sqrt{x}+x\right)^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^3}{2x+1}}\cdot\dfrac{-4x-32x}{x^4}$

c) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2\dfrac{-8}{(x-5)^2} = -\dfrac{8}{3}\dfrac{(x+3)^2}{(x-5)^4}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x(3x-6)-12x^2}{(3x-6)^5} = \dfrac{-6x(x^2+2)}{(3x-6)^5}$

**10.81. (TIC) Halla las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $f(x)=\ln(x^2+1)\cdot \operatorname{tg} x$

c) $f(x)=\dfrac{2\pi^2\ln\left(x^3+x\right)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

e) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arcsen}(3^x)}{x\cos^3\left(e^x\right)}$

b) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+4}\right)$

d) $f(x)=\dfrac{e^{x2}}{\sqrt{x-1}}$

f) $f(t)=\dfrac{\sqrt{t\,e^t}}{\sqrt[4]{t^3-t^2}}$

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot \operatorname{tg} x+\dfrac{\ln(x^2+1)}{\cos^2 x}$

b) $f'(x)=\dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+4}}$

c) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2\pi^2\left(3x^2+1\right)\operatorname{tg}(\pi x)}{x^3+x}-\dfrac{2\pi^3\ln\left(x^3+x\right)}{\cos^2(\pi x)}}{\left(\operatorname{tg}(\pi x)\right)^2}$

d) $f'(x)=\dfrac{e^{x^2}\left(2x\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{x-1}=\dfrac{e^{x^2}(4x(x-1)-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

e) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln 3\cdot\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}-\operatorname{arcsen}(3^x)\left(\cos^3\left(e^x\right)-3xe^x\cos^2(e^x)\operatorname{sen}(e^x)\right)}{\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)^2}$

f) $f'(t)=\dfrac{\dfrac{e^t(1+t)\sqrt[4]{t^3-t^2}}{2\sqrt{t\,e^t}}-\dfrac{\sqrt{t\,e^t}\left(3t^2-2t\right)}{\left(\sqrt[4]{t^3-t^2}\right)^3}}{\sqrt{t^3-t^2}}$

**10.85. ¿Para qué valores de *x* se anulan las derivadas de las funciones siguientes?:**

a) $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2}$

b) $f(x)=e^{2x}-4e^{x}$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

d) $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right)$

e) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

f) $f(x)=x\ln x-x$

g) $f(x)=e^{\frac{x^2}{x-3}}$

h) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x}$

a) $f'(x)=\dfrac{6x-4(3x+1)}{4x^3}=\dfrac{-6x-4}{4x^3}=0 \Leftrightarrow -6x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2}{3}$

b) $f'(x)=2e^{2x}-4e^{x}=e^{x}(2e^{x}-4)=0 \Leftrightarrow 2e^{x}-4=0 \Leftrightarrow x=\ln 2$

c) $f'(x)=\dfrac{-3}{(x+1)(x-2)}$ no se anula nunca.

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}-\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)=\dfrac{-\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x}=-\operatorname{tg} x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$

e) $f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)+\cos^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$ no se anula nunca.

f) $f'(x)=\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

g) $f'(x)=e^{\frac{x^2}{x-3}}\cdot\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0$ y $x=6$.

h) $f'(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cos^2 x}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)^2}=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x+1}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)}$ que no se aula nunca.

**10.88. (TIC) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $f(x)=x^{1-x}$

b) $f(x)=x^{e^x}$

c) $f(x)=(x+\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$

d) $f(x)=(\operatorname{sen} x+\cos x)^{\operatorname{sen} x-\cos x}$

a) $f'(x)=x^{1-x}\left(-\ln x+\dfrac{1-x}{x}\right)$

b) $f'(x)=x^{e^x}e^{x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x)=(x+\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x+\operatorname{sen} x)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}(1+\cos x)}{x+\operatorname{sen} x}\right)$

d) $f'(x)=(\operatorname{sen} x+\cos x)^{\operatorname{sen} x-\cos x}\left((\cos x+\operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x+\cos x)-\dfrac{(\cos x-\operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x+\cos x}\right)$

**10.89. Dada la curva $2xy + y - x - 6 = 0$, se pide:**

**a) Calcula la segunda coordenada del punto $P(5)$, que pertenece a dicha curva.** $P(5, 1)$

**b) Calcula $y'(5)$ utilizando la derivación implícita.** $2y + 2xy' + y' - 1 = 0$ $\quad y'(5) = \frac{-1}{11}$

**c) Calcula $y'(5)$ despejando previamente la $y$ y derivando, posteriormente, la función obtenida. (Los valores obtenidos deben coincidir).**

$(2x + 1)y = x + 6$ luego $y = \frac{x+6}{2x+1}$ e $y' = \frac{-11}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{11}$