Ejercicios examen análisis

Problema 1 (2,4 puntos)

Se considera la función: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} x^2 + nx & si\ x < -2 \\ x^3 + m\ si\ x \geq -2 \end{cases}$

a. Determina **m** y **n** para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4,2]$
b. Halla los puntos del intervalo cuya existencia queda garantizada.

Problema 2 (2,4 puntos)

Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

b. $\lim_{x\to\infty} x \cdot \left[arctg(e^x) - \frac{\pi}{2}\right]$ **c.** $\lim_{x\to 0}(senx)^x \cdot$

Problema 3 (2 puntos)

Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\big(ln(x)\big)^2$$

Problema 4 (2 puntos)

a. Deriva: $y = (x + senx)^{\sqrt{x}}$
b. Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina **a** y **b** sabiendo que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$
c. Halla el valor de **k** para que satisfaga el teorema de Rolle la función $f(x) = kx + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot tgx$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

Problema 5 (1,2 puntos)

Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentra las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de 10 metros.

Ejercicios examen análisis

Continuidad $x=2$

1 $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$ $\qquad 4-2n=-8+m$

$m+2n=12.$

Derivabil. $x=2.$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+n & \text{si } x<-2 \\ 3x^2 & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^-} 2x+n = \lim_{x\to -2^+} 3x^2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+16 & \text{si } x<-2 \\ 3x^2 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$$

$-4+n=12 \Rightarrow \underline{n=16}$ $\qquad \boxed{m=-20}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+16 & \text{si } x<-2 \\ 3x^2 & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

b) $\exists c \in (-4,2) \,/\, \dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)} = \dfrac{-12+48}{6} = 6 = f'(c)$

$f'(c)=6$

$\to 2c+16=6 \Rightarrow c=-5 \notin (-4,-2)$

$\to 3c^2=6 \Rightarrow \boxed{c=\pm\sqrt{2} \in (-4,2)}$

2

a) $\lim_{x\to \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = L$ $\Rightarrow$ tomando logaritmos.

$$L = e^{\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\cos x}\cdot \ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)} =$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)}{\cos x} = \frac{0}{0} \overset{\text{l'Hop.}}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\dfrac{\frac{2}{\pi}-\operatorname{sen} x}{\frac{2x}{\pi}+\cos x}}{-\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\dfrac{2-\pi\operatorname{sen} x}{2x+\pi\cos x}}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2-\pi\operatorname{sen} x)}{-\operatorname{sen} x(2x+\pi\cos x)} =$$

$$= \frac{2-\pi}{-1\cdot\pi} = \frac{2-\pi}{-\pi} = \frac{\pi-2}{\pi} \qquad \boxed{L = e^{\frac{\pi-2}{\pi}}}$$

Ejercicios examen análisis

b) $\lim_{x\to\infty} x\left[\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right] = \infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(e^x) - \pi/2}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \quad \to \text{L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{-1-e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \nearrow \text{L'Hop.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x \cdot e^x + x^2 e^x}{-2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^x}(2x+x^2)}{-2 \cdot e^x \cancel{e^x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{L'H.} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+2x}{-2e^x} = \frac{\infty}{\infty} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2}{-2e^x} = \frac{2}{-\infty} = \underline{0}$$

c) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^{x} \to 0^0 = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(\operatorname{sen} x)} = 0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \downarrow \text{L'H}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x \cdot \cos x + x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\boxed{L = e^0 = 1}$$

Ejercicios examen análisis

3 $f(x) = x\cdot(\ln(x))^2$

$f'(x) = (\ln(x))^2 + x\cdot 2\cdot \ln(x)\cdot \frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2\ln x =$

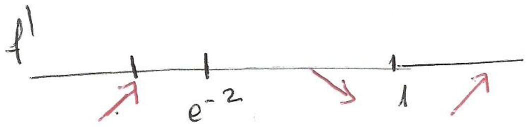
$= \ln x(\ln x + 2)$ $\quad f'(x)=0 \quad \ln x(\ln x+2)=0$

$\ln x = 0 \quad x=e^0=1 \quad \boxed{x=1}$

$\ln x+2=0$

$\ln x=-2$

$\boxed{x=e^{-2}}$



$x=e^{-2}$ Máx relat $(e^{-2}, 4\cdot e^{-2})$

$x=1$ Mín. rel $(1, 0)$

$f''(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x).$

$f''(x) = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln x + 2}{x}$

$f''(x)=0 \quad 2\ln x+2=0 \quad 2\ln x=-2 \ ; \ \ln x=-1 \quad \boxed{x=e^{-1}}$

comprobar P.I con f'''

$f'''(x) = \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x-2(\ln x+1)}{x^2} = \frac{2-2(\ln x+1)}{x^2}.$

$f'''(e^{-1}) \neq 0 \quad \underline{(e^{-1}, e^{-1})\ \text{P.I}}$

4 a) $y=(x+\text{sen})^{\sqrt{x}}$ $\quad \ln y = \sqrt{x}\cdot\ln(x+\text{sen}\,x)$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x+\text{sen}\,x) + \sqrt{x}\,\frac{1+\cos x}{x+\text{sen}\,x}$

$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x+\text{sen}\,x) + \sqrt{x}\,\frac{1+\cos x}{x+2\text{sen}\,x}\right)(x+\text{sen})^{\sqrt{x}}$

Ejercicios examen análisis

b) $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$ $\quad \underline{a}$ y $\underline{b}$? $\quad$ recta tg $y = 2x+3$ en su P.I.

¿ P. Inflex.

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$f''(x) = 12x + 24 \qquad f''(x) = 0 \qquad 12x + 24 = 0 \qquad \underline{x = -2}$

$\underline{m}$ $r_{tg} = \underline{2}$ $\quad \boxed{\underline{m=2} = f'(-2)}$

$f'(-2) = 2 = 6 \cdot (-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \qquad \boxed{\underline{a = 26}}$

Coordenadas del P.I $\quad \underline{x = -2}$

tb. pasa por la recta tangente

$y = 2x + 3 \qquad \underline{x = -2}$ $\quad PI(-2, -1)$

$y = -4 + 3 \qquad y = -1$

Por otra parte:

$f(-2) = -1$

$f(-2) = 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + 26(-2) + b = -1$

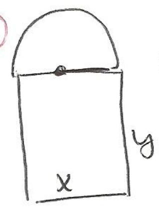
$\boxed{b = 19}$

c) $f(x) = kx + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg} x \qquad f(\pi/6) = f(\pi/3)$

$k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

$k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{k = -2}$

5



$r = \frac{x}{2}$

$P = 10 = x + 2y + \pi r = x + 2y + \pi \frac{x}{2}$

$10 = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = \left(\frac{2+\pi}{2}\right)x + 2y$.

$y = \frac{10 - \frac{2+\pi}{2}x}{2} = 5 - \frac{2+\pi}{4}x$

$A_{máx} = A(x,y) = x \cdot y + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x \cdot y + \frac{\pi x^2}{8}$

A_{max} $A(x) = x \cdot \left(5 - \frac{2+\pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = 5x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2$

$A(x) = 5x + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2+\pi}{4}\right)x^2 = 5x + \left(\frac{-4-\pi}{8}\right)x^2$

$A'(x) = 5 + 2\left(\frac{-4-\pi}{8}\right) \cdot x$

$A'(x) = 0$ $\quad 5 + \frac{-4-\pi}{4}x = 0$ $\quad 20 = (4+\pi)x$

$x = \frac{20}{4+\pi}$

Comprobamos que el máx $\quad$ ↑ Máximo.

$A'' < 0$

$A''(x) = 2\left(-\frac{4-\pi}{8}\right) = \frac{-4-\pi}{4} < 0$

Para $\boxed{x = \frac{20}{4+\pi} \quad y = \frac{10}{\pi+4}}$

Ejercicios examen análisis

Ejercicio 1

Dada la función: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$

c. Halla los puntos de corte con los ejes.
d. Asíntotas
e. Crecimiento y extremos relativos
f. Curvatura y puntos de inflexión
g. Haz una representación aproximada de la gráfica.

Ejercicio 2

a) Calcula las siguientes integrales:

$$a.1)\ \int \frac{3x-8}{x^3+4x}dx \qquad a.2) \int x^2\cos(4x)\,dx \qquad a.3)\ \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$$

b) Calcula el valor de $\underline{\boldsymbol{a}}$ sabiendo que $a > 0$

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}dx = -1$$

Ejercicio 3

Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$

a. Esboza la gráfica redefiniéndola previamente.
b. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica $y = f(x)$ las rectas $x = 0$, $x = 5$ y el eje OX

Ejercicio 4

Considera la función $f(x) = \frac{4}{x}$ $\quad y \quad$ $g(x) = 5 - x$

Esboza el recinto limitado por las gráficas de estas dos funciones y calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio optativo

Determina la función $f(x)$, sabiendo que pasa por el punto $Q(1,-2)$ y que $f'(x) = x cos(1-x^2)$

Ejercicios examen análisis

1) $y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Ptos corte Eje X $y=0$ $(-1,0)$ Eje Y $x=0$ $(0,1)$

Asíntotas

A. Verticales → No

A. horizontales

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \quad \boxed{y=0}$$

No tv. oblicuas. $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty$ → rama parabólica.

Crecimiento y decrecimiento $y = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$

$y' = 2(x+1)\cdot e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2$

$y' = e^{-x}\left(2(x+1) - (x+1)^2\right) = e^{-x}(1-x^2)$

$y' = 0 \quad x = \pm 1$

Signo f': $-$ | -1 | $+$ | 1 | $-$

↘ ↗ ↘

$P(1, \frac{4}{e})$ MAX. Rel.

$Q(-1, 0)$ Min. rel.

Curvatura

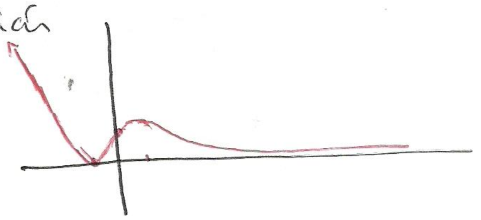
$y'' = -e^{-x}(1-x^2) + (-2x)\cdot e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$

$y'' = 0 \quad x^2 - 2x - 1 = 0$ ⟨ $x = 1+\sqrt{2}$, $x = 1-\sqrt{2}$

Signo f'': $+$ | $1-\sqrt{2}$ | $-$ | $1+\sqrt{2}$ | $+$

∪ ∩ ∪.

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \end{array}\right\}$ ptos Inflexión



Ejercicios examen análisis

② a) $\int \frac{3x-8}{x^2+4x}\,dx =$

$$\frac{3x-8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Cx+D)x}{x(x^2+4)}$$

$3x-8 = A(x^2+4)+(Cx+D)x$ igualando términos $\quad A+C=0 \quad D=3 \quad 4A=-8 \qquad A=-2 \quad C=2 \quad D=3.$

$$\int \frac{3x-8}{x^2+4x} = \int \frac{-2}{x}\,dx + \underbrace{\int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx}_{①}$$

① $\int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}\,dx =$

$= \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{3}{4}\underbrace{\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx}_{②} \longrightarrow$ ② $\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 2dt = 2\,\text{arctg}\, t.$

$= 2\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$

$\frac{x}{2} = t$

$\frac{1}{2}dx = dt \Rightarrow dx = dt\cdot 2$

$= I = -2\ln|x| + \ln|x^2+4| + \frac{3}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

b) $\int x^2\cdot \cos(4x)\,dx = x^2\cdot\frac{\text{sen}(4x)}{4} - \frac{2}{4}\int \frac{\text{sen}(4x)}{4}\cdot 2x\,dx = x^2\frac{\text{sen}(4x)}{4} - \frac{1}{2}\int x\,\text{sen}(4x)\,dx$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$\cos(4x)\,dx = dv$

$\frac{\text{sen}(4x)}{4} = v.$

$x = u$

$dx = du$

$\text{sen}(4x)\,dx = dv$

$-\frac{\cos(4x)}{4} = v$

$= x^2\cdot\frac{\text{sen}(4x)}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos(4x)}{4} - \int -\frac{\cos(4x)}{4}\,du\right] =$

$= x^2\cdot\frac{\text{sen}(4x)}{4} + \frac{x\cdot\cos(4x)}{8} - \frac{\text{sen}(4x)}{32} + C$

Ejercicios examen análisis

$\boxed{2.c}$ $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx =$

$e^x = t$.

$e^x dx = dt \qquad dx = dt/e^x$

$I = \int \frac{t^2}{(1+t)t}\,dt = \int \frac{t}{1+t}\,dt =$

$\cancel{t} \;\lfloor\, 1+t$

$\underbrace{-1}\; -\cancel{t} \qquad 1$

$\int dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt = t - \ln(1+t) + c = \underline{e^x - \ln(1+e^x) + C}$

$\boxed{2d}$ $\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dx = -1$

$1+x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$dx = \frac{dt}{2x}$

$\int_0^a \frac{-4\cancel{x}}{t^2}\cdot\frac{dt}{2\cancel{x}} = -2\int_0^a \frac{dt}{t^2} =$

$= -2\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^a = -2\left[\frac{-1}{1+a^2}+1\right] = \frac{2}{1+a^2} - 2 =$

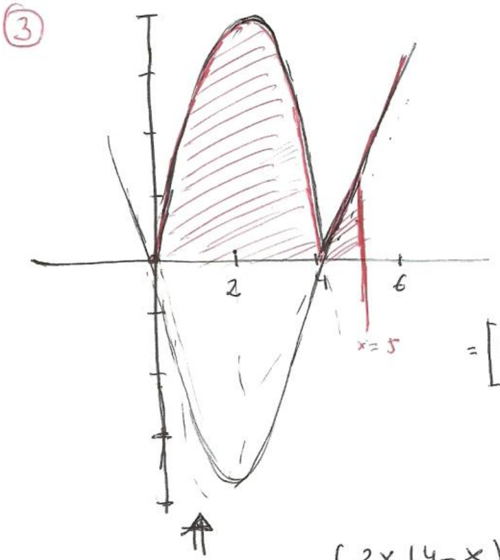
$\frac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \qquad \frac{2}{1+a^2} = 1 \qquad 2 = 1+a^2$

$1 = a^2 \qquad a = \pm 1$

$\underline{a>0} \qquad a = 1$

Ejercicios examen análisis

3



$A_T = A_1 + A_2$

$$A = \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx + \int_4^5 (2x^2 - 8x)\,dx$$

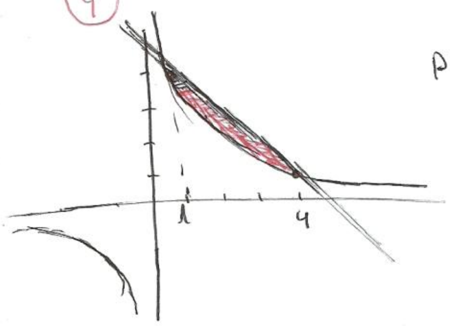
$$= \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 + \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2\right]_4^5 =$$

$$= \left[\left(64 - \frac{128}{3} - 0\right)\right] + \left(\frac{250}{3} - 100\right) - \left(\frac{128}{3} - 64\right)\Big] = 26$$

$$\boxed{A = 26\ u^2}$$

$$f(x) = 2x|4-x| \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si } x < 4 \\ -2x(4-x) & \text{si } x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} -2x^2 + 8x & \text{si } x < 4 \\ 2x^2 - 8x & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

4



Ptos corte $\rightarrow$ $\frac{4}{x} = 5 - x$ $(1,4)$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ $(4,1)$

$$\text{Area} = \int_1^4 \left((5-x) - \frac{4}{x}\right)dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 =$$

$$\left[20 - \frac{16}{2} - 4 \cdot \ln 4 - \left[5 - \frac{1}{2} - 4\ln 1\right]\right] = \left(\frac{15}{2} - 4\ln 4\right) u^2$$

5 $f' = x \cdot \cos(1 - x^2)$ $P(1,-2)$ $\rightarrow$ $f(1) = -2$

$$\int x \cdot \cos(1 - x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\,\text{sen}(1 - x^2) + C$$

$$-\frac{1}{2}\,\text{sen}(1 - x^2) + C \xrightarrow{P(1,-2)} -2 = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,0 + C \Rightarrow \boxed{C = -2}$$