"ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE"

(Guía Didáctica)

Objetivo educativo general en relación con el desarrollo de competencias.

Con <ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> se pretende un objetivo educativo fundamental: mejorar la competencia en cálculo de los/as alumnos/as de Primaria, su dominio cuantitativo de la realidad.

El desarrollo de competencias contemplado en la L.O.E supone un grado de exigencia considerable al profesorado.

Centrándonos exclusivamente en la competencia matemática, implica el desarrollo de capacidades, habilidades, destrezas…(como comprender, interpretar, cuantificar, analizar, relacionar, resolver, decidir,…-casi todas ellas aluden a habilidades cognitivas de orden superior -) que permitan realizar tareas de índole matemática con éxito (que se asocia a la integración de diferentes saberes -numéricos, operacionales, geométricos, …-) en contextos determinados (aplicación en situaciones de la vida cotidiana, en el propio ámbito de la matemática o en el de otras ciencias).

Por analogía, desarrollar competencia/s aritmética/s debe suponer el desarrollo de habilidades, capacidades, destrezas……(como comprender, interpretar, cuantificar, analizar, relacionar, resolver, decidir,…) que permitan resolver con éxito (integrando diferentes saberes matemáticos) situaciones de la vida cotidiana en las que se vean implicados los números y las operaciones…

Objetivo educativo general en relación con el desarrollo de competencias (posicionamiento en relación al tipo de cálculo)

Cuando me topé por primera vez con una frase empleada por Bernardo Gómez Alfonso (“*La Aritmética no es solo cálculo, también es Matemáticas*”. Numeración y Cálculo. Síntesis. 1989) caí en la cuenta de que yo utilizaba la palabra cálculo en un sentido más amplio del que se le da en la frase anterior, como sinónimo de Aritmética… Parafraseando a B.G. Alfonso, yo diría que el cálculo también es Matemáticas, que el cálculo escolar que aquí nos ocupa también es, obviamente, matemática escolar. Esto parece estar más acorde con las exigencias de la LOE y el desarrollo de competencias.

Cálculo pensado, mental, automático, reflexivo, de cabeza, exacto, aproximado, flexible, abierto, oral, escrito, instrumental… Son numerosos los calificativos que se han dado al sustantivo “cálculo”. Parecen numerosas las diferentes modalidades y tipos de cálculo.

En <ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> se apuesta por favorecer un cálculo pensado, que es un modo de cálculo donde tiene primacía el pensamiento y la expresión oral del mismo[1]…, pero ello no significa que tenga que ser necesariamente mental. Nada prohíbe utilizar la escritura para llevar a cabo un cálculo pensado, reflexivo, flexible, que admita y valore la variedad de enfoques posibles, que explore posibilidades, que opte por una de ellas, que determine el orden de actuación, que valore el resultado… Se trata de concebir el cálculo como “*un pequeño desafío, una labor inteligente, divertida, personal*”[2].

Sí requiere la construcción y apropiación de un repertorio de procedimientos, estrategias, técnicas, hechos numéricos elementales,… que permitan inferir los cálculos más complejos a partir de otros más simples.

No se trata de aplicar mecánica o automáticamente un conjunto de reglas…Entonces difícilmente podríamos hablar de un cálculo que también es Matemáticas ya que lo ineludible en esta área es el razonamiento.

Para el/la lector/a, las tablas de multiplicar son un conjunto de hechos numéricos básicos que puede ser utilizado como base o cimiento de otros cálculos mas complicados. Pero esto no fue siempre así. Lo que para nosotros ya es un hecho numérico elemental, que ha sido apropiado y forma parte de nuestra memoria inmediata, para otros (alumnos y alumnas de los primeros niveles de Primaria) es una conquista pendiente de realizar. Y es en el logro de esa conquista, en la construcción que ha de

[1] *“Creemos que la decadencia del trabajo oral y mental en las clases de matemáticas es consecuencia de la falta de reconocimiento de la importancia que el cálculo mental tiene en esta asignatura. Incluso los métodos de cálculo sobre papel utilizados tradicionalmente se basan en la realización mental de determinadas operaciones”*

(COCKCROFF,1982,pág.92)

[2] Bernardo Gómez Alfonso, “*Numeración y Cálculo*”. Síntesis, pág.67

realizar, donde debe aparecer la Matemática (el desarrollo, por tanto, de habilidades numéricas de orden inferior- relacionadas con los niveles mínimos de alfabetización en cálculo- y, sobre todo, de orden superior: comprender, interpretar, cuantificar, analizar, relacionar, resolver, decidir,...).

Así, por ejemplo, parece indiscutible que las tablas de multiplicar -al menos las del 1 al 10- deben pasar a formar parte de la memoria inmediata de nuestros/as alumnos/as de Primaria, es decir, que deben memorizarlas. Constituyen un conjunto de hechos numéricos básicos sobre los que se sustenta la generación de otros cálculos más complejos...Es obvio que la repetición de estos hechos numéricos básicos favorece enormemente su memorización...

Pero esto no significa, ni mucho menos, que el aprendizaje de las tablas deba iniciarse de manera memorística, “ a ciegas”. Y menos aún que formen un contenido con sentido en sí mismo, sin relación con otros, simplemente destinado a la práctica de multiplicaciones tradicionales...

La construcción de tablas multiplicativas (no exclusivamente las anteriormente aludidas) es un contenido más amplio y relevante. Todos/as los/as alumnos/as tienen cierto grado de *razonamiento proporcional* (si en una botella caben 2 litros de agua, en dos botellas cabrán 4 litros; en 3 botellas cabrán tantos litros como en 2 botellas y 1 botella juntas...En 6 botellas habrá el doble de litros que en 3 botellas...).

Es precisamente este razonamiento proporcional el que hay que desarrollar. Las tablas de multiplicar son un contenido aritmético. La construcción de tablas multiplicativas es un procedimiento, no el único, que viene como anillo al dedo para el desarrollo del razonamiento proporcional (que es una habilidad cognitiva de orden superior).

Objetivo educativo general en relación con el desarrollo de competencias (desglose en objetivos más específicos)

Pero el objetivo mejorar la competencia en cálculo de los/as alumnos/as de Primaria es excesivamente general y, por tanto, conviene desmenuzarlo.

Puesto que “es herrando como se llega a ser herrero”, parece lógico pensar que en el ámbito de los números y las operaciones, será comprendiendo, interpretando, cuantificando, analizando, relacionando, resolviendo, decidiendo,... como se logrará el desarrollo de competencia en cálculo.

<ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> pretende favorecer la comprensión del número, su simbolización, las relaciones entre números y sus reglas, las propiedades de las operaciones,…

Para ello se recurre con frecuencia a la ejemplificación, a la ilustración así como al uso continuo de materiales manipulativos y modelos gráficos interactivos.

<ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> pretende ayudar y favorecer en las tareas de interpretación entendidas como “traducciones” a nuevas formas de expresión.

Así, muchas de las aplicaciones muestran la traducción a lenguaje simbólico de manipulaciones concretas, sobre elementos concretos o sobre modelos interactivos, reforzando correspondencias entre lenguajes, haciendo patentes las analogías. Todo ello de manera rápida, instantánea, pretendiendo que la rápida captación de las variables incida positivamente en los aprendizajes. También pretende favorecer las tareas de interpretación entendidas como la expresión oral de las acciones realizadas, de los puntos de vista e hipótesis propias… Pero, en este aspecto, es esencial el rol de dinamizadores de maestros/as.

<ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> pretende, obviamente, favorecer tareas de cuantificación, entendidas como expresión numérica de cantidades de magnitudes. Se hace un uso continuo de la asignación numérica en diferentes contextos.

<ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> pretende favorecer el uso del análisis y la síntesis como operaciones mentales o capacidades que nos permiten estudiar un todo cualquiera, en sus diversas partes componentes, en busca de una síntesis o comprensión profunda del mismo. La composición y descomposición (tanto aditiva como multiplica) básicas en la concepción y utilización de este recurso son un buen ejemplo de ello.

<ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> pretende que los/as alumnos relacionen, establezcan correspondencias entre números, entre operaciones, entre propiedades de las operaciones, entre procedimientos de cálculo…. El propio material ya realiza y propone un buen número de conexiones e interrelaciones entre números y operaciones favoreciendo, por tanto, que los/as niños/as puedan hacerlas:

Ejemplos:

$7 \times 8 = 56 \Rightarrow 56 : 8 = 7 \Rightarrow 56 : 7 = 8$
$7 \times 8 = 56 \Rightarrow 1/7$ de $56 = 8 \Rightarrow 1/8$ de $56 = 7$;
$56 = 7 \times 8 = 7 \times (2 \times 4) = (7 \times 2) \times 4 \Rightarrow 1/4$ de $56 = 7 \times 2$ 14, …

(Este ejemplo corresponde a parte del texto informativo para profesores/as, padres/madres sobre el interés didáctico… que se ofrece en la aplicación “CARTULINAS MULTIPROBLEMA”)

Imaginemos que tenemos tres cartulinas (aquí serán textos entre <>) con diferentes cantidades de una misma magnitud, relacionadas entre ellas mediante la suma y el signo igual: <17 canicas que tenía ayer> + <9 canicas que he ganado> = <26 canicas que tengo ahora>. Resulta sorprendente que esta igualdad, que se corresponde con la generación y resolución de un problema de suma, se pueda transformar o expresar aún de otras tres maneras diferentes:

<9 canicas que he ganado> + <17 canicas que tenía ayer> = <26 canicas que tengo ahora>

<26 canicas que tengo ahora> - <9 canicas que he ganado> = <17 canicas que tenía ayer>

<26 canicas que tengo ahora> - <17 canicas que tenía ayer> = <9 canicas que he ganado>

Procediendo de manera análoga para la multiplicación/división tendríamos;

<8 jarrones> x <6 rosas en cada jarrón> = <48 rosas>
<6 rosas en cada jarrón> x <8 jarrones> = <48 rosas>
<48 rosas> : <6 rosas en cada jarrón> = <8 jarrones>
<48 rosas> : <8 jarrones> = <6 rosas en cada jarrón>

Saber buscar de manera exhaustiva todas las soluciones para un determinado problema propuesto, o al menos intentarlo, refuerza, indudablemente, el significado operacional. Cuando intervienen dos o más operaciones, el número de combinaciones posibles (o formas diferentes de expresar una misma relación) puede ser sorpendente dependiendo de las operaciones implicadas. Invito al lector a encontrar las 12 formas diferentes de expresar la relación siguiente:

<50 páginas que he leído hoy > + <28 páginas que leí ayer> + <52 páginas que aún me quedan por leer> = <130 páginas que tiene este libro>

Objetivo educativo general en relación con el desarrollo de competencias (Sobre la contextualización…)

Un aspecto de enorme importancia es el relacionado con la contextualización del cálculo. Actualmente es comúnmente aceptado en el campo de la Didáctica de la Matemática que las situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las propias matemáticas y de las otras ciencias son los contextos más propicios para poner en práctica un aprendizaje activo, para la inmersión de las matemáticas en la cultura, para el desarrollo de procesos de pensamiento y para dar sentido y utilidad a las matemáticas.

El cálculo es un conocimiento socialmente útil y cobra pleno sentido en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Se corresponde con las fases últimas de todo proceso de RP: realización de los cálculos y valoración del resultado. Aunque aquí se toma en un sentido más amplio que implica, previamente, decidir sobre las operaciones a realizar y sobre el orden de aplicación de las mismas en relación con la semántica y estructura del problema.

Ya señalé, en la justificación de este recurso, que la mayor parte de las aplicaciones multimedia para trabajar la aritmética escolar que nos encontramos en la red ofrecen un cálculo solamente contextualizado dentro de la propia matemática. Eso pone de manifiesto que no parece fácil, ni usual, abordar el cálculo a partir de situaciones problemáticas poniendo el énfasis en los procesos de pensamiento, de manera que los contenidos propios del cálculo sirvan para hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se ha realizado un esfuerzo considerable para que la mayor parte de las aplicaciones de <ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> estén lo mejor contextualizadas posible. En buena parte de ellas el contexto es la resolución de situaciones problemáticas cotidianas con dinero (cuantificación, préstamo, reunión, reparto, compra, pago, devolución,…). En otras aplicaciones el contexto es la manipulación de materiales virtuales que tienen su correspondiente analógico y que aportan bastante significado a las acciones realizadas (pesar y valorar igualdades como equilibrio en una balanza; representación, cuantificación y composición/descomposición de números utilizando ábacos, bloques multibase, juegos de dados,…; medir espacios, tiempos y velocidades,…). En otros casos se utilizan modelos gráficos interactivos …..

Contenidos y contextos

Las aplicaciones que integran <ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE> se organizan en cinco grupos o submenús atendiendo tanto al contenido que tratan como al contexto que proponen. Estos grupos, así como el orden que ocupa cada aplicación en su submenú correspondiente, no implican necesariamente, un orden de realización de las actividades propuestas. En una misma sesión se puede trabajar con varias aplicaciones pertenecientes a submenús diferentes.

A continuación se presenta cada aplicación, sin hacer alusión al título pero de forma que se corresponda con su orden en la pantalla, mediante una descripción breve del contenido que permite trabajar y el contexto en el que lo hace.

<u>Submenú A:</u> Aquí se han agrupado aplicaciones que permiten pensar y representar los números con material concreto estructurado para facilitar la comprensión y empleo del Sistema de Numeración Decimal así como aquellas que inciden en el dominio de la estructura aditiva (suma/resta).

- Composición/descomposición aditivo/sustractiva del 100 mediante dos modelos manipulativos e interactivos (ábaco-contador de 100 bolas y centena dinámica)

- Composición/descomposición aditivo/sustractiva de números hasta 1.000.000 mediante dos modelos manipulativos e interactivos (bloques multibase y visualizador de números.)

- La representación y determinación de números y estrategias de suma y resta en un ábaco interactivo de 4 órdenes de unidades.

- La descomposición aditiva en contextos lúdicos (diana_dardos y juego de dados)

- El cálculo mental se sumas y restas y el razonamiento numérico para la formación de igualdades (equilibrio) en una balanza interactiva.

- Suma/resta, series e iniciación a la multiplicación_división en una recta numérica interactiva.

- Estrategias fundamentales de la suma y resta a partir de repartos interactivos, que serán el fundamento de los algoritmos propuestos para estas operaciones.

- Ilustración gráfico_numérica interactiva (con monedas y billetes) de un algoritmo flexible para la suma, basada en números, en un contexto de resolución de problemas. Formato para la práctica tutorizada, sin límites, del algoritmo aprendido eligiendo grado de dificultad.

- Ilustración gráfico_numérica interactiva (con monedas y billetes) de un algoritmo flexible para resta por comparación, basada en números, en un contexto de resolución de problemas. Formato para la práctica tutorizada, sin límites, del algoritmo aprendido eligiendo grado de dificultad.

- Ilustración gráfico_numérica interactiva (con monedas y billetes) de un algoritmo flexible para resta por detracción, basada en números, en un contexto de resolución de problemas. Formato para la práctica tutorizada, sin límites, del algoritmo aprendido eligiendo grado de dificultad.

- Ilustración gráfico_numérica interactiva (con monedas y billetes) de un algoritmo flexible para resta por escalera ascendente, basada en números, en un contexto de resolución de problemas. Formato para la práctica tutorizada, sin límites, del algoritmo aprendido eligiendo grado de dificultad.

- Ilustración gráfico_numérica interactiva (con monedas y billetes) de un algoritmo flexible para resta por escalera descendente, basada en números, en un contexto de resolución de problemas. Formato para la práctica tutorizada, sin límites, del algoritmo aprendido eligiendo grado de dificultad.

Submenú B: Aquí se han agrupado aplicaciones que inciden en el dominio de la estructura multiplicativa (multiplicación /división).

- Ilustración gráfico_numérica interactiva (con monedas y billetes) de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Práctica eligiendo grado de dificultad.
- Ilustración gráfica interactiva (con modelo rectangular interactivo de puntos coloreados) de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y la resta. Práctica.
- Formato abierto e interactivo para la generación libre, y dirigida, de multiplicaciones gráficas, basadas en números, con diferentes opciones de configuración. Práctica de la multiplicación con apoyo gráfico.
- Formatos interactivos para la práctica autorizada de la multiplicación de manera flexible y basada en números.
- Composición y descomposición multiplicativa (factores) de números mediante modelos interactivos (rueda de factores, cubos apilables, "ábaco de factores", trazo interactivo,…). Teoría y práctica de la descomposición factorial y determinación de divisores. Descomposición factorial y fracciones de un número
- Práctica de la división (exacta y entera) a partir de la descomposición del dividendo en múltiplos del divisor.
- Ilustración gráfico_numérica interactiva (con monedas y billetes) de un algoritmo flexible para la división como reparto a partes iguales – entre 2, 3, 4 y 5 - , basada en números. Práctica.
- Formato interactivo para la práctica tutorizada de la división de manera flexible y basada en números.

Submenú C: Las aplicaciones aquí agrupadas inciden en diferentes aspectos del cálculo pero siempre en un contexto de resolución de problemas.

- Razonamiento proporcional. Construcción de tablas de proporcionalidad (incluyendo las tablas de multiplicar del 2 a 10) en un contexto de resolución de problemas. Diferentes niveles de dificultad.
- Práctica del análisis de los cálculos realizados en problemas aritméticos escolares de nivel 1 y 2 cuya resolución se muestra, pero incompleta.

- Cálculo mental con series mediante asignación de etiquetas numéricas en un circuito circular interactivo recorrido por un cochecito.

- Relaciones numéricas fundamentales. Propuesta de resolución, por simulación con billetes y monedas, de 100 problemas abiertos.

- Cálculo mental en situaciones de compra (precio exacto, devolución exacta, averiguar precio desconocido). Resolución mediante simulación, colocando cantidades de monedas y billetes en zonas interactivas. Tantos problemas con dos niveles de dificultad.

- Relaciones numéricas básicas (doble/mitad, triple/tercio). Contexto de resolución de problemas mediante simulación utilizando recta numérica interactiva.

- Cálculo mental y razonamiento proporcional por asignación de etiquetas numéricas a gráficos de barras.

- Significado numérico-operacional. Propuesta de resolución de 100 multi-problemas aritméticos escolares de nivel 1 y 2 mediante reubicación de cartulinas numéricas desplazables y signos interactivos de las operaciones. Búsqueda exhaustiva de todas las soluciones posibles.

- Cálculo (exacto y aproximado) de espacios recorridos, tiempos empleados y velocidades. Se utiliza un modelo en el que, para cada ejercicio diferente, un punto móvil recorre el perímetro de un polígono regular de lado conocido. Medida indirecta de espacios recorridos haciendo uso del cálculo. Medida directa y aproximada de tiempos utilizando un cronómetro virtual. Cálculo aproximado de velocidades.

Submenú D: Las aplicaciones aquí agrupadas tienen un formato de fichas interactivas e inciden directamente en estrategias concretas de cálculo mental. Persiguen la realización de un cálculo flexible que se base en la apreciación de las regularidades o patrones numéricos que se manifiestan en pantalla y/o en el empleo del razonamiento proporcional. Todas ellas permiten trabajar con diferentes grados o niveles de dificultad. En todas ellas la tabla de cálculos a realizar que proponen cambia, generándose aleatoriamente, con la simple pulsación de una tecla. Están dotadas de corrección instantánea y su completado es asistido. Además pueden completarse tanto desde el teclado como desde los botones numéricos mostrados en pantalla.

- Cálculo mental. Sumar y restar números acabados en 0 y 00. Cálculo basado en inferencias a partir de la apreciación de patrones.

Tres niveles de dificultad. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

- Cálculo mental de sumas y restas basado en la apreciación de regularidades. Todas las sumas y restas propuestas en cada tabla se obtienen a partir de una misma igualdad básica que se muestra en pantalla. Cinco niveles de dificultad. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

- Cálculo mental de restas como complemento al minuendo elegido (configurable). Todas las restas propuestas en cada tabla tienen el mismo minuendo. Dificultad variable en función del minuendo elegido. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

- Cálculo mental de restas a partir del valor de posición de las cifras. Minuendo y sustraendo se diferencia, a lo sumo, e 1 ó 2 cifras correspondientes al mismo orden de unidades (la diferencia siempre es un número exacto de unides, o de decenas, o de centenas,…). Cinco niveles de dificultad. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

- Cálculo mental de restas mediante el procedimiento de escalera ascendente a partir del procedimiento “rana saltarina” .Como apoyo gráfico, utiliza un modelo de recta numérica interactiva, con puntos sensibles que pueden ser alcanzado por la rana en 2, 3, saltos…

- Cálculo mental. Sumar / restar 7, 17, 27, … 8, 18, 28,…9, 19, 29,… Cálculo flexible basado en inferencias a partir de la apreciación de patrones. Tres grados o niveles de dificultad. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

- Cálculo mental. Doble / mitad, triple /tercio. Cuatro tipologías de actividad x 3 niveles de dificultad. Cálculo flexible basado en inferencias a partir de la apreciación de patrones y el uso del razonamiento proporcional. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

- Cálculo mental. Fracciones de un número. Presenta, para cada número propuesto aleatoriamente por el ordenador según unos criterios preestablecidos, un modelo de descomposición factorial interactivo que facilita el aprendizaje y la resolución. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

- Cálculo mental. Porcentajes. Cinco tipologías x 4 grados de dificultad/tipología. Cálculo flexible basado en inferencias a partir de la apreciación de patrones y el uso del razonamiento proporcional. Generación aleatoria, con corrección instantánea y completado asistido.

Submenú E: Este grupo de dos multiaplicaciones está dedicado a la comprensión, dominio y aplicación de la equivalencia fracción – decimal – porcentaje.

- Modelos para comprender, descubrir y aplicar la equivalencia fracción – decimal-porcentaje .

- Fracciones, decimales, porcentajes. Ilustración interactiva y gradual del proceso de construcción de gráficos de sectores. Práctica haciendo uso de diferentes modelos (sector circular interactivo, gráfico de sectores interactivo, círculo con número variables de sectores circulares interactivos, multitabla). Interpretación y práctica de construcción de gráficos de sectores en un contexto de resolución de problemas.

Consideraciones metodológicas y didácticas:

Dado que <ASÍ CALCULAMOS EN MI COLE>, entre otros aspectos, propone procedimientos novedosos para ilustrar las propiedades fundamentales de las operaciones, y, sobre todo, para la práctica algorítmica, considero necesario justificar suficientemente el interés didáctico de cada una de las aplicaciones. Considerando la extensión total del conjunto de esas informaciones, he decidido, como más conveniente, dotar a cada aplicación de un botón de acceso a información para profesores y profesoras, padres y madres sobre el interés didáctico de la aplicación.

No obstante, resaltaré aquí algunas consideraciones metodológicas y didácticas de carácter general.

Las aplicaciones permiten tanto el trabajo autónomo como el semidirigido. Así como el trabajo individual -o por parejas - (frente a un ordenador personal) y el colectivo (sobre todo mediante PDI). En este último caso, el apoyo gráfico que suponen los modelos manipulativos e interactivos sirve de soporte ideal tanto al profesorado (para las explicaciones, para el planteamiento de interrogantes que creen, en sus alumnos/as, el conflicto cognitivo provocador de aprendizajes…) como a las explicaciones, argumentaciones, verificación de hipótesis, etc… de los/as alumnos/as.

Están dotadas, todas ellas, de una poderosa interactividad que favorece el descubrimiento y la construcción personal de aprendizajes. Estos materiales tienen un aprovechamiento óptimo con una metodología de corte constructivista.

La mayor parte de ellas cuenta con información oral grabada, a modo de presentación, con indicaciones e instrucciones que suelen mostrarse, también, de forma escrita en la pantalla.

La mayoría de las aplicaciones son inagotables, en el sentido de que no repiten datos preestablecidos; permiten volver a ellas tantas veces como se desee para profundizar en el dominio de los contenidos que trabajan.

Para adecuarse a la diversidad de alumnado presente en cualquier clase, no sólo se puede hacer uso de la configuración del grado de dificultad de la aplicación. Por lo general se podrá, también, elegir otra aplicación que, tratando el mismo contenido desde otro aspecto o perspectiva, pueda resultar más conveniente a determinados niños/as.

Las aplicaciones muestran una simple estadística de aciertos e intentos. La comparación relativa de estos datos permite saber a profesores/as, padres/madres y alumnos/as el grado de eficacia con que se está realizando la aplicación. De un solo golpe de vista el profesorado puede deducir el grado de aprovechamiento de la actividad para cada uno de sus alumnos/as para, así, poder tomar las decisiones necesarias. Para los/as alumnos es algo esencial, siempre están pendientes de los puntos de los demás. Esa competitividad es sana y los motiva. Determinadas aplicaciones registran de otras formas diferentes la actividad realizada. Así, por ejemplo, para *“Algoritmo flexible de la multiplicación”* y *“Algoritmo flexible de la divisíón*”, por cada operación correctamente realizada se añade un botoncito cuadrado a un panel colección que permitirá cargar la operación correspondiente – tal y como fue realizada- en el momento que se desee. El número de cuadraditos en el panel colección coincide, por tanto, con el número de operaciones correctamente realizadas. Otras aplicaciones muestran un panel estadístico más detallado en el que se recogen los ejercicios correctamente realizados por niveles o grados de dificultad o por tipología de actividad elegida.

Esta obra se ha hecho accesible a personas con minusvalía visual que acceden a ella mediante lectores de pantalla. La presión repetida de la tecla TABULADOR permite recorrer de manera ordenada cada uno de los elementos de cada una de las aplicaciones y pantallas convirtiendo los textos descriptivos, muy detallados y ocultos al usuario, en voz. Se describe la actividad propuesta, cómo se organizan sus elementos y qué papel tiene cada uno de ellos… Todo con el lenguaje más asequible posible.

Consideraciones sobre otros aspectos curriculares:

Presento aquí algunos fragmentos (en letra más pequeña) de informaciones que acompañan a determinadas aplicaciones que creo que resultan más que suficientes para para poner de manifiesto concepciones sobre las operaciones básicas – y otros aspectos curriculares- en que se basa esta propuesta y ciertas “direcciones” para su desarrollo:

Todos los algoritmos flexibles que se proponen para la suma y resta se basan en la propiedad fundamental de cada una de estas operaciones:

La propiedad fundamental de la SUMA es que ésta no varía cuando disminuimos un sumando en una determinada cantidad de unidades y aumentamos otro sumando en la misma cantidad de unidades (compensación).

Así, cuando tenemos una cantidad de pastelillos colocados en dos o tres platos (sumandos), la cantidad total de pastelillos colocados no varía si se pasan pastelillos de un plato a otro.

Esto hecho aporta una visión dinámica de la adición en la que se sustenta la estrategia fundamental para el cálculo de sumas: PODEMOS CAMBIAR LOS SUMANDOS INICIALES POR OTROS MÁS CONVENIENTES QUITANDO n UNIDADES A UNO DE ELLOS Y SUMANDO n UNIDADES A OTRO:

7 + 8 = 8 + 7 = 9 + 6 = 10 + 5 = ...;   39 + 27 = 40 + 26 = 66, etc...

(Nótese que la propiedad conmutativa es, simplemente, un caso particular de la propiedad fundamental.

Si le damos <la vuelta> a la propiedad fundamental, resulta otro hecho de fundamental importancia para un cálculo flexible, dinámico y pensado: Una determinada cantidad se puede obtener como suma de otras de múltiples maneras diferentes (descomposición aditiva):

17= 10 + 7 = (10 - 3) + (7 + 3) = 7 + 10 = (7 + 5) + (10 - 5) = 12 + 5 = 11 + 6 = 9 + 8 = (6 + 3) + 8, etc...

La propiedad asociativa de la suma es, también, un caso particular de la propiedad fundamental.

Si tenemos una determinada cantidad de pastelillos repartidos en dos platos, la diferencia entre el plato que más pastelillos tiene (minuendo) y el que menos tiene (sustraendo) no varía cuando añadimos o quitamos el mismo número de pastelillos a cada plato.

La propiedad fundamental de la resta, pues, es que podemos aumentar (o disminuir) en n unidades tanto el minuendo como el sustraendo sin que varíe la diferencia:

13 - 6 = (13 - 3) - (6 - 3) = 10 - 3 = 9 - 2 = 8 - 1 = 7 - 0 = 7;
(desplazamiento hacia la izquierda en la recta numérica)
13 - 6 = (13 + 5) - (6 + 5) = 18 - 11 = 19 - 12 = 20 - 13 = 7 - 0 = 7;
(desplazamiento hacia la derecha en la recta numérica)

La visión más dinámica de la resta, a mi juicio, se consigue con el <modelo de desplazamiento en la recta numérica> ya que refuerza otra propiedad fundamental de la resta, la de ser una distancia.

Así, en segunda escena de esta aplicación, este modelo tiene un tratamiento especial. Se les propone a los/as alumnos/as que midan la longitud de cada uno de los elementos de una colección de animalitos hechos con papel. El desplazamiento horizontal sobre la recta numérica, tanto de cada uno de los animales como de los topes deslizables, favorecerá dotar a la resta de un significado dinámico y conceptual de suma importancia para un cálculo flexible y pensado. El modelo pone de manifiesto que la estrategia fundamental de la resta es un desplazamiento <rígido> bien en sentido creciente o bien en sentido decreciente.
Este hecho impide la conmutatividad de la resta y pone de manifiesto que una determinada cantidad se puede obtener mediante descomposición sustractiva de varias o muchas maneras diferentes.

Didácticamente es de gran importancia ilustrar adecuadamente y poner de manifiesto, desde el primer nivel de Primaria, estas propiedades fundamentales sobre las que posteriormente se deben sustentar tanto el cálculo mental de sumas y restas como los algoritmos flexibles correspondientes de estas operaciones.

La tercera y última escena de esta aplicación propone la práctica de cambiar sumas y restas por otras que den el mismo resultado pero que tengan diferentes sumandos (o diferentes minuendo y sustraendo), aún en el caso de que no siempre el cambio pedido implique simplificación del cálculo. Aquí lo que importa es que los/as alumnos/as practiquen la estrategia de CAMBIO.

SUMA Y RESTA SOBRE LA RECTA NUMÉRICA

Esta aplicación permite trabajar la suma / resta (también la multiplicación / división) con el apoyo gráfico de una recta numérica interactiva. Este modelo interactivo facilita la visualización y comprensión del significado de la suma/resta como avance / retroceso, sobre todo con las flechas (de color diferente para cada una de las dos direcciones de la recta numérica) que se generan al pulsar sobre los puntos.

Pero la aplicación da mucho más juego. Dado que conviene trabajar la recta numérica asignando diferentes valores de unidades a cada división (de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5, etc…), esta aplicación permite aumentar o disminuir, de uno en uno, la serie numérica asociada a los puntos interactivos de la recta. (<CONTAR DE TANTOS EN TANTOS>)

Además de la manipulación libre que permite abordar numerosos aspectos numéricos, la aplicación propone dos tipos de retos: dibujar las flechas que se corresponden con una operación combinada de suma y resta dada, y escribir la expresión de las operaciones indicadas que se corresponden con una determinada configuración de flechas sobre la recta numérica. Ambos tipos de retos están diseñados de manera que favorezcan la apreciación de los patrones numéricos (series aritméticas de valores de los puntos de la recta) así como el apoyo sobre este reconocimiento para facilitar el cálculo mental (<contar de tantos en tantos>) en un contexto donde se combinan perfectamente la adición / sustracción con la introducción de la multiplicación/división…

Como he señalado anteriormente, la aplicación da un juego enorme. Aquí me limitaré a sugerir algunas actividades que pueden ser propuestas por el/la profesor/a en la opción de manipulación libre:

Si la ranita salta de 2 en 2 comenzando en el cero, ¿en qué números se parará?(NÚMEROS PARES, TABLA DE MULTIPLICAR DEL 2, MÚLTIPLOS DE DOS…)

Si la ranita salta de 2 en 2 comenzando en el cero, ¿cuántos saltos debe dar para llegar al 18? ¿Y para llegar al 22? (RELACIONES MULTIPLICACIÓN DIVISIÓN)

Si la ranita salta de 5 en 5, ¿se parará en el 20? ¿Y en el 34? (MÚLTIPLOS DEL 5)

Una ranita salta, desde el cero, de 4 en 4 y otra, desde el cero, de 5 en 5, ¿en qué números - flores, nenúfares,..- han estado las dos? (4 x 5 = 20 ---> 4 saltos de 5 = 5 saltos de 4 ---> 4 veces 5 = 5 veces 4)

¿Cómo podríamos configurar la recta numérica para que la rana alcanzara el número 60 en cuatro saltos sin saltarse ningún punto de la recta? (Simulación, verificación de hipótesis, etc...)

Sobre las relaciones íntimas entre la multiplicación y la división.

RELACIONANDO MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN. (LA DIVISIÓN BASADA EN MÚLTIPLOS DEL DIVISOR...)

Con esta aplicación se pretende mostrar la potencialidad del procedimiento de descomponer el dividendo en múltiplos del divisor para realizar divisiones. Todo número (dividendo) puede descomponerse aditivamente en varios números de manera que todos ellos (o todos ellos menos uno) sean múltiplos de otro número dado (divisor). Así, por ejemplo, si la división propuesta es 7869 : 15, podemos proceder construyendo múltiplos de 15 que se acerquen al dividendo (15, 30, 60,..., 150, 1500,... 300, 3000, 600, 6000,..,, 6000+1500, 6000+1500+300,...). La división propuesta podría <prepararse> así: 7869 : 15 =(7800 + 60 + 9) : 15; o así 7689 : 15 = (6000 + 1500 + 300 + 60 + 9): 15; o de otras múltiples formas que permitan su fácil resolución <por partes>.

Dividir de esta manera implica previamente concebir la multiplicación como procedimiento para conseguir (u obtener) múltiplos...La importantísima propiedad distributiva del producto (con respeto a la suma y la resta) pone de manifiesto que la suma o resta de múltiplos de un número es un nuevo múltiplo del número considerado o, lo que es equivalente, que un múltiplo de un número dado puede expresarse como suma o resta de otros múltiplos de ese número: 8 x 17 = 8 x 10 + 8 x 7 ---> 8 x 17 es un múltiplo de 8 que puede obtenerse como suma de otros múltiplos de 8. /// 8 x 17 = 8 x 20 - 8 x 3 ---> 8 x 17 es un múltiplo de 8 que puede obtenerse como diferencia de dos múltiplos de 8...

La aplicación comienza mostrando algunos ejemplos (divisiones) resueltos de lo que se pretende conseguir con la misma. A continuación, en la escena siguiente (2), se profundiza en la obtención de múltiplos: << Los múltiplos de 5 son infinitos. Esta tabla muestra sólo unos pocos, pero a partir de ellos se pueden obtener muchos más... ¿ 5 x 14 ? PUEDES FORMAR ESTE NUEVO MÚLTIPLO DE 5 SUMANDO O RESTANDO OTROS MÚLTIPLOS DE 5. Pulsa sobre los botones y sobre las celdillas de esta tabla interactiva para aprender a resolver cada uno de los cálculos que se proponen.>>

En la escena 3 se experimenta con números obtenidos como suma de varios - 2 ó 3 - múltiplos de uno dado (de la misma tabla de multiplicar, para que se me entienda mejor). Se ilustra, por ejemplo, que la división entre 5 (divisor) de un número (dividendo) obtenido como suma de tres números de la *tabla del 5 (tre múltiplos del divisor) es sumamente fácil si se tiene en cuenta la descomposición del número (dividendo).*

En la última escena (4) se guía el cálculo de divisiones por el método de descomponer el dividendo en múltiplos del divisor, tanto en el caso de divisiones exactas como de divisiones enteras. Como las divisiones se generan aleatoriamente y pueden configurarse tres niveles diferentes de dificultad, la aplicación permite practicar y profundizar este importante procedimiento algorítmico tanto como se desee...

La mayor parte de las divisiones implícitas en la resolución de los problemas propuestos en los libros de texto del 2º y tercer ciclos de Primaria pueden resolverse mentalmente, sin especiales dificultades, siguiendo el procedimiento aquí ilustrado.

Los algoritmos tradicionales de lápiz y papel de las operaciones básicas no preparan para un cálculo pensado; no hay correspondencia entre el procedimiento de realización del algoritmo y los procedimientos o estrategias que utilizamos cuando calculamos mentalmente, de manera exacta o aproximada. Además, debe quedar claro que los algoritmos no deben ser el punto de partida en el tratamiento de las operaciones sino el de llegada y que no tienen sentido en sí mismos sino en relación con las situaciones problemáticas que resuelven.

¿Cómo se justifica un algoritmo flexible de la multiplicación basado en números? La flexibilidad está en función de uno de los principios fundamentales de la enseñanza mátemática (consensuados internacionalmente):<una matemática para todos/as>. Cuanta mayor flexibilidad tenga el algoritmo mejor se adaptará a la diversidad de nuestros/as alumnos/as. Aunque ya se ha repetido en otras aplicaciones, se trata de un algoritmo flexible porque cada alumno/a puede llegar al mismo resultado mediante un recorrido distinto, y haciendo uso de estrategias diferentes.

Es pensado porque se basa en inferencias (se comenta a continuación), y basado en números porque la base del cálculo es la DESCOMPOSICIÓN NUMÉRICA (la expresión del número como combinación de otros más sencillos) y no la operatoria con cifras. Pero, además, al corresponderse con acciones reales y manipulaciones sobre objetos, está íntimamente relacionado el procedimiento algorítmico con los procedimientos de cálculo mental que pretendemos desarrollar en nuestros/as alumnos/as.

Un algoritmo como éste, basado en un cálculo pensado con números, requiere un cálculo en el que se realicen INFERENCIAS (representadas en los ejemplos con fechas), en el que los cálculos más complejos se deriven de otros más sencillos, es decir, tendrá siempre presente la búsqueda de relaciones numéricas. Éstas son fundamentalmente de dos tipos: las que se basan en la apreciación de patrones o regularidades (si 7 x 8 = 56 --->7 x 80 = 560) y las que se basan en el razonamiento proporcional (si 7 x 8 = 56 --->7 x 16 = 56 x 2 = 112; como 189 x 10 = 1890 ---> 189 x 5 = 945 ---> 189 x 0.5 = 94.5, etc...) y las propiedades de las operaciones. Habituarse a realizar este tipo de inferencias es lo que asegura verdadera competencia en el cálculo.

ALGORITMO FLEXIBLE PARA LA DIVISIÓN. (ILUSTRACIÓN GRÁFICA CON BILLETES Y MONEDAS).

Esta aplicación es una auténtica joya. Introduce de manera ejemplar, a mi jucio, la división como reparto a partes iguales. No se tata de <dividir números> se trata de <repartir una cantidad de dinero>, tal y como se haría en la vida real. Esta distinción es de gran relevancia didáctica. Todos los términos de la división cobran pleno significado. Cada acción sobre el dinero tiene su repercusión numérica en el algoritmo interactivo que se va generando...

Pero cuando me refiero a esta aplicación en particular como a una joya es por la riqueza y el juego que da, no ya solo a nivel individual sino, sobre todo, a nivel colectivo, cuando se presenta a través de una PDI. Podemos pedir a nuestros/as alumnos/as que adelanten una respuesta, que predigan el resultado y lo argumenten; aprovechar las estimaciones diferentes para crear el necesario conflicto cognitivo generador de un aprendizaje significativo. El apoyo visual de los billetes y monedas facilita la visualización y antelación de una respuesta ya que favorece la retención mental de las cantidades manejadas así como su separación... Posteriormente, se puede aprovechar el algoritmo generado, así como la configuración final de las mismas cantidades de dinero en cada una de las zonas de reparto, para rememorar las acciones realizadas, etc...

Hay maestros/as que introducen la <división entre 2> en primero de Primaria y en segundo la división entre 3, entre 5.... Esto ya es una cuestión a nivel de centro escolar en la que no entro. Esta aplicación es ideal para introducir la división como reparto a partes iguales. Permite realizar tantos repartos (propuestos aleatoriamente por el ordenador) como se desee y volver a ella cuantas veces sea necesario. La mismas actividades pueden hacerse, lógicamente, con juegos de billetes. No obstante, invito al lector/a a pensar en todas las ventajas que ofrece este modelo virtual sobre el manejo de juegos de monedas y billetes analógicos en clase...

FACTORES. DESCOMPOSICIÓN MULTIPLICATIVA DE NÚMEROS.

La descomposición multiplicativa de números, junto con la descomposición aditiva, son dos pilares fundamentales sobre los que se sustenta el significado numérico y, por tanto, el cálculo pensado...

Mientras que en la escuela se trabaja desde edades tempranas la composición multiplicativa (3 x 4 = 12) la descomposición multiplicativa (12 = 3 x 4; 12 = 2 x 6 =...), por tradición, por inercia, no se introduce, por lo general, hasta tercer ciclo de Primaria dentro de los contenidos propios de la <Divisibilidad>. Esto, a mi juicio, es un error.

3 x 4 = 12 y 12 = 3 x 4 son la misma realidad (en concreto la misma igualdad) vista en direcciones opuestas. Si en la matemática escolar nos acostumbrásemos a ver los temas que tratamos <al derecho> y < al revés> innovaríamos, sin duda, y descubriríamos un mundo de contenidos interrelacionados.

En esta primera escena de la aplicación se presenta un juego de factores - números que se van a multiplicar, que son factores primos, pero eso no tienen necesariamente que saberlo los/as alumnos/as - para jugar a componerlos formando productos de dos, de tres y de cuatro factores y dando un significado gráfico y conceptual al producto obtenido. Es decir, no se comienza descomponiendo sino componiendo... descubriendo que 2 x 3 x 5 = 30, por ejemplo, se traduce en un ortoedro formado por 5 placas, cada una de *ellas de 2 x 3 cubitos. O que 3 x 5 x 7 x 11 = 1155 es LA MASA TOTAL DE UN BLOQUE DE 105 CUBITOS, CADA UNO DE ELLOS CON 11 GRAMOS DE MASA... De esta manera, los/as niños/as toman contacto con igualdades en las que intervienen productos de varios factores y que equivalen a números concretos, es decir, que son, a la par, expresiones de la composición y descomposición de números.*

En la segunda escena de esta aplicación se presenta la descomposición factorial de un número de manera natural, sin artificios, sin necesidad de saber lo que son números primos (ya que es un resultado al que se llega y no del que se parte) ni las reglas de divisibilidad. La descomposición factorial en factores primos surge de manera natural a partir del procedimiento de calcular la descomposición máxima, de descomponer mientras se pueda -a partir de las tablas de multiplicar-, mientras aparezcan números nuevos: 120 = 12 x 10 = (3 x 4) x (2 x 5) = (3 x 2 x 2) x (2 x 5) = 3 x 2 x 2 x 2 x 5 ---> 120 = 2 x 2 x 2 x 3 x 5.

¿Y que se hace con esta descomposición? ¿Para qué sirve? ¿Qué aporta al conocimiento del número y al cálculo? En primer lugar se introduce un modelo interactivo novedoso y muy poderoso desde el punto de vista didáctico al que denomino <ábaco de factores>. Cada factor en un botón circular que, al ser pulsado, puede colocarse en la fila de arriba si estaba abajo o en la de abajo si estaba arriba. Pulsar sobre un 2 y subirlo a la fila de arriba es equivalente a dividir entre 2 el número considerado. Pulsar sobre un 2 y sobre un 3, para separarlos del resto de factores, equivale a dividir entre 6... Ello permite analizar a la perfección, y con suma facilidad, las relaciones multiplicativas del número; descubrir, por ejemplo que 120 es dos veces algo, o tres veces algo, o 5 veces algo, etc... En definitiva, permite descubrir los divisores de un número...y poner este conocimiento al servicio del cálculo mental de productos y divisiones.

En la escena 3 se propone experimentar, en la manera y con el modelo interactivo anteriormente aludido, con los factores de un número cualquiera, menor que 1000, elegido por el usuario. Los dos productos parciales en que queda dividido un número, cuando se pulsa sobre alguno de sus factores en este modelo, se traduce en una flecha bidireccional que une a una pareja de divisores complementarios (con respecto al producto) del número en cuestión. Así, por ejemplo, para 360 se forman parejas como 1<--->360, 2<--->180, 3<--->120, 4<--->90, 5<--->72, etc...

En la escena 4, con cada nuevo ejercicio propuesto, se muestra la descomposición factorial de un número elegido aleatoriamente por el ordenador y se propone completar con los divisores que faltan.

En la escena 5, se relaciona el modelo interactivo presentado en la escena 2 con el cálculo de fracciones de un número. Si se presenta 45 = 3 x 3 x 5 y se pulsa sobre un 3 (dividir entre 3, un tercio...) se mostrará que 1/3 de 45 = 3 x 5 = 15.

En la escena 6, de una manera muy amena para los/as niños/as, y de manera estrictamente mental, se profundiza en la comprensión de lo tratado en las escenas anteriores. Se presenta un <árbol de factores> y, con cada nuevo ejercicio, el/la alumno/a tendrá que realizar con el puntero del ratón un trazo grueso que una aquellos factores que multiplicados entre sí generen el número propuesto (opción 1) o el número que es la solución a la fracción solicitada del número (opción 2). Se aprovecha la ayuda interactiva para ir introduciendo de manera contextualizada, teoría básica de divisibilidad...