Potencias de polinomios (funciones elevadas a potencias)

Reglas de integración:

$$\boxed{\int u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k \quad n \neq 1}$$

$$\boxed{\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + k}$$

Ejemplos:

$$\int (x+5)^8 dx = \frac{(x+5)^9}{9} + k$$

$$\int (x+5)^8 dx \to \begin{bmatrix} t = x+5 \\ dt = dx \end{bmatrix} \to \int t^8 dt = \frac{t^9}{9} + k = \frac{(x+5)^9}{9} + k$$

$$\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + k$$

$$\int \frac{dx}{x-3} \to \begin{bmatrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{bmatrix} \to \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + k = \ln|x-3| + k$$

$$\int \frac{-dx}{(x+1)^2} = -\int (x+1)^{-2} dx = -\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + k = \frac{1}{x+1} + k$$

$$\int \frac{-dx}{(x+1)^2} \to \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} \to -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + k = \frac{1}{x+1} + k$$

$$\int 4(4x+5)^8 dx = \frac{(4x+5)^9}{9} + k$$

$$\int 4(4x+5)^8 dx \to \begin{bmatrix} t = 4x+5 \\ dt = 4dx \end{bmatrix} \to \int t^8 dt = \frac{t^9}{9} + k = \frac{(4x+5)^9}{9} + k$$

$$\int \frac{3dx}{3x-1} = \ln|3x-1| + k$$

$$\int \frac{3dx}{3x-1} \to \begin{bmatrix} t = 3x-1 \\ dt = 3dx \end{bmatrix} \to \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + k = \ln|3x-1| + k$$

$$\int 7\sqrt{7x-5}dx = \int 7(7x-5)^{1/2} dx = \frac{(7x-5)^{3/2}}{3/2} + k$$

$$\int 7\sqrt{7x-5}dx \to \begin{bmatrix} t = 7x-5 \\ dt = 7dx \end{bmatrix} \to \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + k = \frac{(7x-5)^{3/2}}{3/2} + k$$

Funciones exponenciales

Regla de integración:

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + k} \qquad \boxed{\int u'e^u dx = e^u + k} \qquad \boxed{\int u'a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + k}$$

Ejemplos:

$$\int e^{4x+2} dx = \frac{1}{4}\int 4e^{4x+2} dx = \frac{e^{4x+2}}{4} + k$$

$$\int e^{4x+2} dx \to \begin{bmatrix} t = 4x+2 \\ dt = 4dx \to \frac{dt}{4} = dx \end{bmatrix} \to \int e^t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int e^t dt = \frac{1}{4}e^t + k = \frac{e^{4x+2}}{4} + k$$

$$\int xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$$

$$\int xe^{-x^2} dx \to \begin{bmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \to \frac{dt}{-2} = xdx \end{bmatrix} \to \int e^t \frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + k = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$$

$$\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln(10)} + k$$

$$\int x \cdot 7^{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot 7^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{7^{x^2+1}}{\ln(7)} + k$$

$$\int x \cdot 7^{x^2+1} dx \to \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \to \frac{dt}{2} = xdx \end{bmatrix} \to \int 7^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int 7^t dt = \frac{7^2}{2\ln(7)} + k = \frac{7^{x^2+1}}{2\ln(7)} + k$$

Funciones trigonométricas seno y coseno

Reglas de integración:

$$\boxed{\int u'\sin(u)\,dx = -\cos(u)+k} \qquad \boxed{\int u'\cos(u)dx = \sin(u)+k}$$

Ejemplos:

$$\int(\cos(x)+\sin(2x))\,dx = \int\cos(x)dx + \frac{1}{2}\int 2\sin(2x)dx = \sin x - \frac{\cos(2x)}{2}+k$$

$$\int\cos(4x+1)dx = \frac{1}{4}\int 4\cos(4x+1)dx = \frac{\sin(4x+1)}{4}+k$$

$$\int\cos(4x+1)dx \to \begin{bmatrix} t=4x+1 \\ dt=4dx \to \dfrac{dt}{4}=dx \end{bmatrix} \to \int\frac{\cos(t)}{4}dt = \frac{\sin(t)}{4}+k = \frac{\sin(4x+1)}{4}+k$$

$$\int x\sin(x^2+5)dx = \frac{1}{2}\int 2x\sin(x^2+5)dx = \frac{-\cos(x^2+5)}{2}+k$$

$$\int x\sin(x^2+5)dx \to \begin{bmatrix} t=x^2+5 \\ dt=2xdx \to \dfrac{dt}{2}=xdx \end{bmatrix} \to \int\frac{\sin t}{2}dt = \frac{-\cos t}{2}+k = \frac{-\cos(x^2+5)}{2}+k$$

$$\int\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = -\int\frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)+k$$

$$\int\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} \to \begin{bmatrix} t=\dfrac{1}{x} \\ dt=\dfrac{-1}{x^2}dx \to -dt=\dfrac{dx}{x^2} \end{bmatrix} \to \int\cos t\,(-dt) = -\sin t + k = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)+k$$

$$\int\sin(x)\cos^5(x)dx = \int -\sin(x)\cos^5(x)dx = \frac{-\cos^6(x)}{6}+k$$

$$\int\sin(x)\cos^5(x)dx \to \begin{bmatrix} t=\cos(x) \\ dt=-\sin(x)dx \end{bmatrix} \to \int -t^5dx = -\frac{t^6}{6}+k = \frac{-\cos^6(x)}{6}+k$$

$$\int\tan(x)dx = \int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)|+k$$

$$\int\tan(x)dx = \int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx \to \begin{bmatrix} t=\cos(x) \\ dt=-\sin(x)dx \end{bmatrix} \to \int\frac{-dt}{t} = -\ln|t|+k = -\ln|\cos(x)|+k$$

$$\int x\tan(x^2)dx = \frac{-1}{2}\int\frac{-2x\sin(x^2)}{\cos(x^2)}dx = -\frac{\ln|\cos(x^2)|}{2}+k$$

$$\int x\tan(x^2)dx = \frac{-1}{2}\int\frac{-2\sin(x^2)}{\cos(x^2)}dx \to \begin{bmatrix} t=\cos(x^2) \\ dt=-2x\sin(x^2)dx \end{bmatrix} \to -\frac{1}{7}\int\frac{dt}{t} = \dots$$

$$\dots = -\frac{1}{7}\ln|t|+k = -\frac{\ln|\cos(x^2)|}{7}+k$$

Integrales con primitiva arcoseno

Regla de integración:

$$\boxed{\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right)+k}$$

Ejemplos:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+k$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(2x)+k$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(2x)+k$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+k$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}} \to \begin{bmatrix} t=x-3 \\ dt=dx \end{bmatrix} \to \int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{2}\right)+k = \arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+k$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-16+16}} = \int\frac{dx}{\sqrt{16-(x+4)^2}} = \arcsin\left(\frac{x+4}{4}\right)+k$$

Más reglas de integración seno y coseno:

$$\int \frac{u'}{\sin(u)}dx = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| + k \qquad \int \frac{u'}{\cos^2(u)}dx = \tan(u) + k \qquad \int \frac{u'}{\sin^2(u)}dx = -\operatorname{cotan}(u) + k$$

Ejemplos:

$$\int \frac{3dx}{\sin(3x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{3x}{2}\right)\right| + k$$

$$\int \frac{xdx}{\cos(x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sin(90°+x^2)} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{90°+x^2}{2}\right)\right| + k$$

$$\int \frac{xdx}{\cos(x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sin(90°+x^2)} \to \begin{bmatrix} t = 90°+x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} \to \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin(t)} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| + k = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{90°+x^2}{2}\right)\right| + k$$

Integrales con primitiva arcotangente

Regla de integración:

$$\int \frac{u'}{u^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + k$$

Ejemplos:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x) + k$$

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+7} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-1^2+7} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+6} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + k$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-2^2+6} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + k$$

$$\int \frac{3dx}{4x^2+6x+5} = \int \frac{3dx}{\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+3} = \frac{3}{2}\int \frac{2dx}{\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Integrales racionales y método de descomposición de fracciones simples:

Se trata de integrales del tipo polinomio dividido entre polinomio. Los casos que se estudian en bachillerato son de polinomios factorizables a términos lineales o cuadráticos, siendo los lineales los más frecuentes en exámenes y los cuadráticos los menos frecuentes.

Método de descomposición en fracciones simples. Ejemplos:

En cada caso deduciremos el valor de las constantes en la descomposición en fracciones simples utilizando dos métodos.

Primer ejemplo: Con factorizaciones lineales elevadas a potencia uno.

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

Método de los sistemas de ecuaciones:

$$A(x-2)+B(x+2) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/4 \\ B=1/4 \end{cases}$$

Método de sustitución de la variable:

$$A(x-2)+B(x+2) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & 4B=1 \to B=1/4 \\ x=-2 & -4A=1 \to A=-1/4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{-1}{4(x+2)} + \frac{1}{4(x-2)}$$

Segundo ejemplo: Con factorizaciones lineales elevadas a potencia diferente a uno.

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+2)(x-1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

Método de los sistemas de ecuaciones:

$$A(x+2)+B(x+2)(x-1)+C(x-1)^2 = x \Rightarrow \begin{cases} C+B+A=1 \\ B+C=0 \\ 2A-2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=2/9 \\ C=-2/9 \end{cases}$$

Método de sustitución de la variable:

$$A(x+2)+B(x+2)(x-1)+C(x-1)^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x=1 & 3A=1 \to A=1/3 \\ x=-2 & 9C=-2 \to C=-2/9 \\ x=0 & \frac{2}{3}-2B-\frac{2}{9}=0 \to B=2/9 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{2}{9(x-1)} - \frac{2}{9(x+2)}$$

Tercer ejemplo: Con factorizaciones con términos cuadráticos.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x}=\frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Método de los sistemas de ecuaciones:

$$A(x^2+x+1)+Bx^2+Cx=3x^2+2x+1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ A+C=2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases}$$

Método de sustitución de la variable:

$$A(x^2+x+1)+Bx^2+Cx=3x^2+2x+1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & A=1 \\ x=1 & 3+B+C=6 \\ x=-1 & 1+B-C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^3+x^2+x}=\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Ejemplos aplicados a la integración:

Valiéndonos de los ejemplos anteriores, procederemos directamente en las integrales.

$$\int\frac{dx}{x^2-4}=\int\frac{dx}{(x+2)(x-2)}=\frac{-1}{4}\int\frac{dx}{(x+2)}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-2)}=-\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x-2|+k$$

$$\int\frac{x}{x^3-3x+2}dx=\int\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{-1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{9}\ln|x+2|+k$$

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x}dx=\int\frac{3x^2+2x+1}{x(x^2+x+1)}dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}=\ln|x|-\ln|x^2+x+1|+k$$

Método de integración por partes

Formula de integración por partes:

$$\boxed{\int udv=uv-\int udv}$$

$$\int\ln(x)dx\rightarrow\left|\begin{array}{c} u=\ln(x)\rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx\rightarrow v=x \end{array}\right|\rightarrow x\ln(x)-\int x\frac{dx}{x}=x\ln(x)-x+k$$

$$\int\arcsin(x)dx\rightarrow\left[\begin{array}{c} u=\arcsin(x)\rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx\rightarrow v=x \end{array}\right]\rightarrow x\arcsin(x)-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\ldots$$

$$\ldots=x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+k$$

$$\int\arctan(x)dx\rightarrow\left[\begin{array}{c} u=\arctan(x)\rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx\rightarrow v=x \end{array}\right]\rightarrow x\arctan(x)-\int\frac{xdx}{1+x^2}=\ldots$$

$$\ldots=x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+k$$

Casos especiales con integración por partes:

El que vamos a ver es un caso especial que se da en la integración por partes, se trata de integrales que tras realizar una o varias veces el método de integración por partes obtenemos otra vez la integral que tenemos justo al principio:

$$\int e^x \cos x dx \to \begin{bmatrix} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \to v = \sin x \end{bmatrix} \to e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Tenemos que resolver a parte esta integral:

$$\int e^x \sin x dx \to \begin{bmatrix} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \to v = -\cos x \end{bmatrix} \to -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Sustituimos ahora en nuestra integral del principio el resultado que nos salió de la primera integración por partes:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Consideremos la siguiente sustitución:

$$I = \int e^x \cos x dx$$

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x \sin x + e^x \cos x \to I = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) \to \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right)$$

Finalmente incorporamos la constante k:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) + k$$