

ÁLGEBRA

Junio-Septiembre 2010

E3.- a) Sea  $B$  una matriz cuadrada de tamaño  $3 \times 3$  que verifica que  $B^2 = 16I$ , siendo  $I$  la matriz unidad. Calcular el determinante de  $B$ . **(1,5 puntos)**

b) Hallar todas las matrices  $X$  que satisfacen la ecuación  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . **(1 punto)**

E3.- Consideramos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + az = 1+a, \\ x - ay + z = 1, \\ x + y + 3z = a. \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro  $a$ . **(2 puntos)**

b) Resolver el sistema para  $a=1$ . **(0,5 puntos)**

E4.- Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

a) Calcular  $A^{-1}$ . **(1 punto)**

b) Resolver la ecuación matricial  $AX + 2AB = B$ . **(1,5 puntos)**

E4.- Discutir, y resolver en los casos que sea posible, el sistema:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2. \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

E4.- a) Sea  $A$  una matriz cuadrada tal que  $A^2 - 3A = -2I$  (siendo  $I$  la matriz identidad). Probar que  $A$  admite inversa y utilizar la igualdad dada para expresar  $A^{-1}$  en función de  $A$ .

**(1,5 puntos)**

b) Sea  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$  la matriz de coeficientes de un sistema lineal. Hallar razonadamente

los valores de  $m$  para los que el sistema es compatible determinado. **(1 punto)**

**E4.- a)** Si se sabe que el determinante  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  vale 5, calcular razonadamente

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ b_1 & 2b_2 & 3b_3 \\ c_1 & 2c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_3 & b_2 + b_3 & c_2 + c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Si  $A$  es una matriz cuadrada de tamaño  $2 \times 2$  para la cual se cumple que  $A^{-1} = A^t$  ( $A^t =$  traspuesta de la matriz  $A$ ), ¿puede ser el determinante de  $A$  igual a 3? **(1 punto)**

**E3.-** Dadas las matrices  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ :

a) ¿Para qué valores de  $m$  existe  $B^{-1}$ ? Para  $m = 1$ , calcular  $B^{-1}$ . **(1,5 puntos)**

b) Para  $m = 1$ , hallar la matriz  $X$  tal que  $X \cdot B + C = D$ . **(1 punto)**

**E3.-** Discutir según los valores del parámetro  $a$ , y resolver cuando sea posible, el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}. \quad \text{(2,5 puntos)}$$

#### Junio 2011

**E3.- a)** Calcular el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$  **(1'5 puntos)**

b) Si  $B$  es una matriz cuadrada de dimensión  $3 \times 3$  cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de  $5B$  y el de  $B^2$  **(1 punto)**

**E3.-** Discutir y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores

del parámetro  $m$ :  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + my + z = m + 1 \end{cases}$  **(2'5 puntos)**

#### Septiembre 11

**E3.- a)** Averiguar para que valores de  $m$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix}$  no tiene inversa

**(0'5 puntos)**

b) Calcular la matriz inversa de  $A$  cuando  $m = 0$  **(1 punto)**

c) Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada  $A$  vale  $-1$  y que el determinante de la matriz  $2 \cdot A$  vale  $-16$ . ¿Cuál es el orden de la matriz? **(1 punto)**

**E3.-** Discutir según los valores de  $m$  y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = m \text{ (2'5 puntos)} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Junio 12

**E3.-** Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = (a-1)(a+2) \\ x + ay + z = (a-1)^2(a+2) \\ x + y + az = (a-1)^3(a+2) \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema según los valores del parámetro  $a$  (1'5 puntos)  
 b) Resolver el sistema para  $a = 1$  (1 punto)  
 c) Resolver el sistema para  $a = -2$  (1 punto)

**E3.-** Sea  $M$  una matriz cuadrada que cumple la ecuación  $M^2 - 2M = 3I$ , donde  $I$  denota la matriz identidad

a) Estudiar si existe la matriz inversa de  $M$ . En caso afirmativo expresar  $M^{-1}$  en términos de  $M$  e  $I$  (1'25 puntos)

b) Hallar las matrices  $M$  de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  que cumplen la ecuación  $M^2 - 2M = 3I$

(1'25 puntos)

Septiembre 12

**E3.-** Se considera el sistema  $\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + y - z = a + 1 \end{cases}$ , donde  $a$  es un parámetro real. Se pide:

- a) Discutir el sistema en función del valor de  $a$ . (1,75 puntos)  
 b) Hallar la solución del sistema para  $a = 1$ , si procede. (0,75 puntos)

**E3.-** a) Determinar, en función del valor del parámetro real  $a$ , el rango de la

matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$ . (1,5 puntos)

b) Sea  $C$  una matriz  $2 \times 2$  de columnas  $C_1$  y  $C_2$  y de determinante 5, y sea  $B$  una matriz  $2 \times 2$  de determinante 2. Si  $D$  es la matriz de columnas  $4C_2$  y  $C_1 - C_2$ , calcular el determinante de la matriz  $BD^{-1}$ . (1 punto)

Junio 13

**E1.-** Sea las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular, cuando sea posible,  $C \cdot B^t$ ,  $B^t \cdot C$  y  $B \cdot C$  (0'75 puntos)

b) Hallar  $a$  para que el sistema  $x \cdot A + y \cdot B = 4 \cdot C$  de tres ecuaciones y dos incógnitas  $x$  e  $y$  sea compatible determinado, y resolverlo para ese valor de  $a$  (1'75 puntos)

**E1.-** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de  $a$  la matriz es inversible? (0'5 puntos)

b) Estudiar el rango según los valores de  $a$  (0'5 puntos)

c) Hallar  $a$  para que cumpla  $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$  (1'5 puntos)

### Septiembre 13

**E1.-** a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro  $m$  :

$$\begin{cases} 3x - y + mz = 0 \\ x + y = m \\ mx - 3y + mz = -2m \end{cases} \quad (2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para  $m = 0$ . (0,5 puntos)

**E.1.-** Sea la matriz  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ .

a) Calcular  $M^{-1}$ . (1,5 puntos)

b) Calcular la matriz  $X$  que cumple  $X \cdot M + M = 2M^2$ . (1 punto)