Selectividad Matematicas II. Castilla y León

Septiembre 2014

Opción A

E1.- a) Resolver la siguiente ecuación matricial **X A = B - C** siendo $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **(1,5 puntos**

b) Sean $F_1, F_2\ y\ F_3$ las filas de una matriz cuadrada de orden **3** cuyo determinante vale **5**. Calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $3F_1 - F_3$, F_2 y $2F_3$ **(1 punto)**

$a)$

$$XAA^{-1} = (B-C)\cdot A^{-1} \Rightarrow XI = (B-C)\cdot A^{-1} \Rightarrow X = (B-C)\cdot A^{-1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 5-6 = -1 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow X = \left[\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -8\\ -14 & 24\end{pmatrix}$$

$b)$

$$|3F_1 - F_3 \quad F_2 \quad 2F_3| = |3F_1 \quad F_2 \quad 2F_3| - |F_3 \quad F_2 \quad 2F_3| = 3\cdot 2\cdot |F_1 \quad F_2 \quad F_3| - 2\cdot |F_3 \quad F_2 \quad F_3|$$

$$|3F_1 - F_3 \quad F_2 \quad 2F_3| = 6\cdot 5 - 2\cdot 0 = 30$$

E2.- Sea el punto **A(1 , 1 , 3)** y la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-y+2=0 \\ z=2 \end{cases}$

a) Calcular el plano perpendicular a la recta *r* que pase por **A**. **(1 punto)**
b) Calcular la distancia del punto **A** a la recta **r**. **(1,5 puntos)**

a) El plano π tiene como vector director el de la recta perpendicular al vector AG, siendo G el punto genérico del plano, como ambos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano

$$r \equiv \begin{cases} x-y+2=0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow y = x+2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(1,1,3) = (x-1, y-1, z-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow (1,1,0)\cdot(x-1, y-1, z-3) = 0 \Rightarrow$$

$$x-1+y-1=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y-2=0$$

b) Hallando el punto de intersección **P** de la recta r y el plano π (hallado en el apartado anterior), el módulo del vector **AP** es la distancia buscada

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2+\lambda+\lambda-2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P\begin{cases} x = 2+0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (2,0,2)-(1,1,3) = (1,-1,-1)$$

$$d(A,r) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3}\ u$$

También se podría calcular $\quad \text{dist }(P,r) = \dfrac{|P_rP x v_r|}{|v_r|}$

E3.- Sea la función **f(x) = x²e⁻ˣ**. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica. **(2,5 puntos)**

$$f'(x)=2x\,e^{-x}-x^2e^{-x}=x\,e^{-x}(2-x)\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow x\,e^{-x}(2-x)>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ e^{-x}>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ 2-x>0\Rightarrow -x>-2\Rightarrow x<2 \end{cases}$$

	$-\infty$	0	2	∞
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	

Decrecimiento $\forall x\in\Re/(x<0)\cup(x>2)$ **Crecimiento** $\forall x\in\Re/0<x<2$

e^2

$$f''(x)=e^{-x}(2-x)-x\,e^{-x}(2-x)-x\,e^{-x}=e^{-x}\left[2-x-2x+x^2-x\right]=e^{-x}\left(x^2-4x+2\right)$$

$$x^2-4x+2=0\Rightarrow\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot2=16-8=8\geq0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\x=2-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow Concavidad\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow e^{-x}\left(x^2-4x+2\right)>0\Rightarrow e^{-x}\left(x-2-\sqrt{2}\right)\left(x-2+\sqrt{2}\right)$$

$$\begin{cases} x-2-\sqrt{2}>0\Rightarrow x>2+\sqrt{2} \\ e^{-x}>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x-2+\sqrt{2}>0\Rightarrow x>2-\sqrt{2} \end{cases}$$

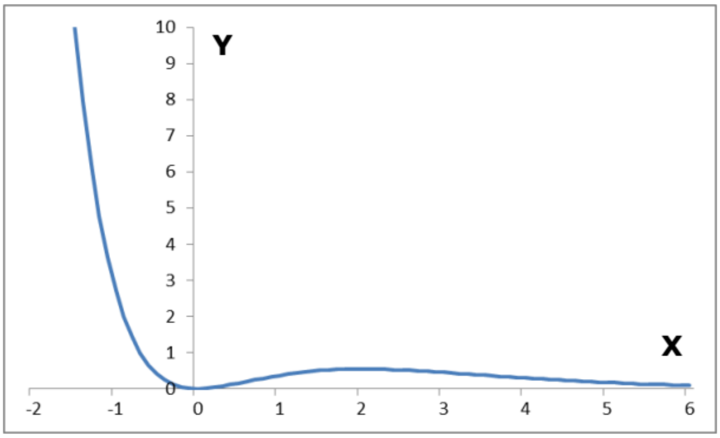
	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	∞
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**	

Concavidad $\forall x\in\Re/\left(x<2-\sqrt{2}\right)\cup\left(x>2+\sqrt{2}\right)$

Convexidad $\forall x\in\Re/2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$

Punto de inflexión en $x=2-\sqrt{2}\Rightarrow f(0)=\left(2-\sqrt{2}\right)^2e^{-\left(2-\sqrt{2}\right)}$

Punto de inflexión en $x=2+\sqrt{2}\Rightarrow f(0)=\left(2+\sqrt{2}\right)^2e^{-\left(2+\sqrt{2}\right)}$



E4.- a) Hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2-x+4$ es paralela a la recta de ecuación $y=5x-7$ **(1 punto)**

b) Calcular el área delimitada por la parábola de ecuación $f(x)=2x^2$ y la recta $y=2x+4$ **(1'5 puntos)**

$a)$

$$f'(x)=2x-1 \Rightarrow f'(x)=5 \Rightarrow 2x-1=5 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f(3)=3^2-3+4=10$$

$b)$

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow 2x^2=2x+4 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow 2\left(x^2-x-2\right)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9\geq 0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+3}{2}=2 \\ x=\frac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

$$-1<0<2 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=2\cdot 0^2=0 \\ y(0)=2\cdot 0+4=4 \end{cases} \Rightarrow y(0)>f(0)$$

$$A=\int_{-1}^{2}(2x+4)\,dx-\int_{-1}^{2}2x^2\,dx=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{2}+4\cdot\left[x\right]_{-1}^{2}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{2}=\left[2^2-(-1)^2\right]+4\cdot\left[2-(-1)\right]-\frac{2}{3}\cdot\left[2^3-(-1)^3\right]$$

$$A=(4-1)+4\cdot(2+1)-\frac{2}{3}\cdot\left[8-(-1)\right]=3+12-\frac{18}{3}=9\,u^2$$

Opción B

E.1.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx-y=1 \\ -x+my=1-2m \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores de *m*. **(1,5 puntos)**

b) Hallar los valores de m para los que el sistema tenga alguna solución en la que **x = 2**. **(1 punto)**

$$mx-y=1$$
$$-x+my=1-2m$$

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix}=m^2-1 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow m^2-1=0 \Rightarrow (m-1)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ m+1=0 \Rightarrow m=-1 \end{cases}$$

$$\forall m\in\Re-\{-1,1\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=2=\text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$Si\ m=-1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=1\neq rang\ (A/B)=2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$Si\ m=1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=1<\text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

$$\text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x\,,\,y)=(\lambda\,,\,\lambda-1)$$

$a)$

$$\begin{cases} 2m-y=1 \\ -2+my=1-2m \end{cases} \Rightarrow y=2m-1 \Rightarrow -2+m\,(1-2m)=1-2m \Rightarrow -2+m-2m^2=1-2m \Rightarrow$$

$$2m^2-3m+3=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 3=9-12=-3 \Rightarrow \text{No hay solucion como Compatible Determinado}$$

$$\text{Cuando } m=1 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x\,,\,y)=(2\,,\,2-1)=(2\,,1)$$

E.2.- a) Dados el punto **A(3 , 5 , 1)** la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+2 = z+1$ y el plano $\pi \equiv 3x-2y+z+5=0$, determinar el punto **B** de π tal que la recta **AB** sea paralela a la recta **r**. **(1,5 puntos)**

b) Hallar las coordenadas de un vector de módulo 1 que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ siendo **P(1 , 3 , -1)** , **Q(2 , 0 , 1)** y **R(-1 , 1 , 0)**. **(1 punto)**

a) El punto **S** que se busca es el de intersección de la recta **s** que contiene el punto **A** y tiene como vector director el de la recta **r** , y el plano π

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Rightarrow Inter\sec ción \Rightarrow 3\cdot(3+2\lambda) - 2\cdot(5+\lambda) + (1+\lambda) + 5 = 0 \Rightarrow$$

b

$$9+6\lambda-10-2\lambda+1+\lambda+5=0 \Rightarrow 5\lambda+5=0 \Rightarrow 5\lambda=-5 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow Q\begin{cases} x = 3+2\cdot(-1) \\ y = 5+(-1) \\ z = 1+(-1) \end{cases} \Rightarrow Q(1\,,4\,,0)$$

) El vector perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, es el vector resultante del cálculo del producto vectorial de ambos vectores, después lo normalizaremos dividiendo sus componentes entre el valor de su modulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (2\,,0\,,1) - (1\,,3\,,-1) = (1\,,-3\,,2) \\ \overrightarrow{PR} = (-1\,,1\,,1) - (1\,,3\,,-1) = (-2\,,-2\,,2) \equiv (1\,,1\,,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} + 3\vec{k} - 2\vec{i} + 2\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{4^2+4^2+4^2} = \sqrt{48} = 2\sqrt{7}$$

$$\left\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right\| = \frac{4}{2\sqrt{7}}\vec{i} + \frac{4}{2\sqrt{7}}\vec{j} + \frac{4}{2\sqrt{7}}\vec{k} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right\| = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\,,\frac{2\sqrt{7}}{7}\,,\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$$

E.3.- Se desea construir un depósito de chapa (en forma de prisma recto, abierto y de base cuadrada) con una capacidad de 32.000 litros. ¿Cuáles han de ser las dimensiones del depósito para que se precise la menor cantidad de chapa posible en su construcción? 32.000
(2,5 puntos)

Siendo **B** el lado de la base y **H** la altura del prisma

$$\begin{cases} B^2H = 32000\,dm^3 \Rightarrow H = \dfrac{32000}{B^2} \\ A = B^2 + 4BH \end{cases} \Rightarrow A = B^2 + 4B\cdot\frac{32000}{B^2} = B^2 + \frac{128000}{B} = \frac{B^3+128000}{B} \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dB}{dH} = \frac{3B^2B - (B^3+128000)}{B^2} = \frac{3B^3 - B^3 - 128000}{B^2} = \frac{2B^3-128000}{B^2} \Rightarrow A'=0 \Rightarrow \frac{2B^3-128000}{B^2} = 0 \Rightarrow$$

$$2B^3 - 128000 = 0 \Rightarrow 2B^3 = 128000 \Rightarrow B^3 = \frac{128000}{2} = 64000 \Rightarrow B = \sqrt[3]{64000} = 40$$

$$A'' = \frac{d^2B}{dH^2} = \frac{6B^2B^2 - 2B\,(2B^3-128000)}{B^4} = \frac{6B^3 - 2B^3 + 256000}{B^3} = \frac{4B^3+256000}{B^3} \Rightarrow$$

$$A''(40) = \frac{d^2B}{dH^2} = \frac{4\cdot 40^3 + 256000}{40^3} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} B = 40\,dm \\ H = \dfrac{32000}{40^2} = \dfrac{32000}{1600} = 20\,dm \end{cases}$$

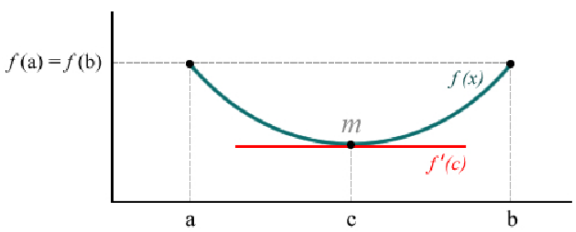
E4.- a) Enunciar e interpretar geométricamente el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

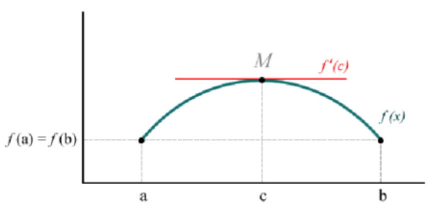
b) Hallar la primitiva de $x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto **(1 , 2)** **(1,5 puntos)**

a)

<u>Teorema de Rolle</u>

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,b)$ tal que **f'(c) = 0**





$b)$

$$F(x)=\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\cdot dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ x^2\,dx=dv\Rightarrow v=\int x^2\,dx=\dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

$$F(x)=\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\cdot dx=\frac{1}{3}x^3\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+K$$

$$F(1)=2\Rightarrow\frac{1}{3}1^3\left(\ln 1-\frac{1}{3}\right)+K=2\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\left(0-\frac{1}{3}\right)+K=2\Rightarrow-\frac{1}{9}+K=2\Rightarrow K=2+\frac{1}{9}=\frac{19}{9}$$

$$F(x)=\frac{1}{9}x^3(3\cdot\ln x-1)+\frac{19}{9}=\frac{1}{9}x^3(\ln x^3-1)+\frac{19}{9}=\frac{1}{9}\left[x^3(\ln x^3-1)+19\right]$$