OPCIÓN B

Ejercicio 1. [2,5 puntos]

Calcular *b* y *c* sabiendo que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ **es derivable en el punto *x* = 0.**

Si $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$, tiene que ser también continua.

Luego $f(0)=c$; $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+bx+c=c$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=c$

$c=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\dfrac{0}{0}$. Aplicando L'Hôpital: $c=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=\dfrac{1}{1}=1$

Por otro lado haciendo la derivada obtenemos:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+b & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\frac{x}{(x+1)}-\ln(x+1)}{x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Entonces para que sea derivable se tiene que cumplir:

$$f'(0)=b;\ \lim_{x\to 0^-} 2x-b=b;\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{(x+1)}-\ln(x+1)}{x^2}=b$$

$b=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{(x+1)}-\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{0}{0}$ Aplicando L'Hôpital:

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{(x+1)^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2}$$

Por lo tanto la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{x}{2}+1 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

Ejercicio 2. [2,5 puntos]

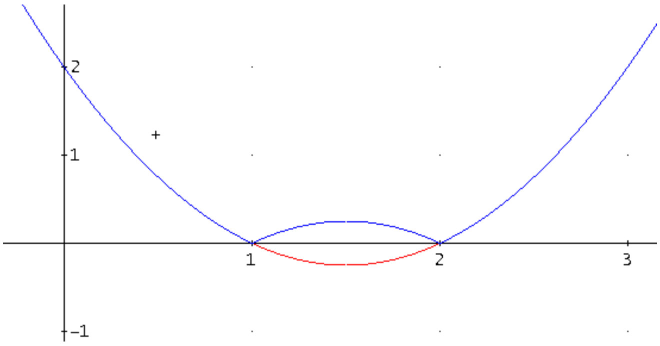
Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{2} \left| x^2 - 3x + 2 \right| dx$ **.**

Dibujamos la función $y = \left| x^2 - 3x + 2 \right|$:

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \ x_2 = 2$

Puntos de corte con el eje *Y*: (0, 2)

Vértice: V_x = -b/2a = 3/2 $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \rightarrow V_y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow V = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$



La función en valor absoluto es la azul, puesto que la función no puede tener valores negativos.

Por lo tanto haremos $\int_{-1}^{2} \left| x^2 - 3x + 2 \right| dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 3x + 2 \right) dx + \int_{1}^{2} \left(-x^2 + 3x - 2 \right) dx =$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right|_{-1}^{1} + \left| -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right|_{1}^{2} = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2 \right) - \frac{8}{3} + \frac{12}{2} - 4 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) = \frac{29}{6}$$

Ejercicio 3. [2,5 puntos]

Discutir según los valores del parámetro *a*, y resolver cuando sea posible, el sistema:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+(a-1)z=0 \\ x+(a-1)y+az=a \end{cases}$$

La matriz ampliada será: $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & a & a \end{array}\right)$.

Calculamos $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a_1=1, a_2=2$

Estudiamos los rangos en función del valor de *a*:

Para *a* ≠ 1 y 2, tenemos que rg (*M*) = rg (*M*') = 3. El sistema es compatible determinado.

Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}=\frac{-a^2+2a-1}{-a^2+3a-2}=\frac{(a-1)(a-1)}{(a-1)(a-2)}=\frac{a-1}{a-2}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}=\frac{-a^2+2a-1}{-a^2+3a-2}=\frac{a-1}{a-2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}=\frac{a-1}{-a^2+3a-2}=\frac{(a-1)}{(a-1)(a-2)}=\frac{1}{a-2}$$

Para *a* = 1, si sustituimos en el sistema tenemos $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$

Es un sistema compatible indeterminado, que tiene por soluciones: $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$

Para *a* = 2 si sustituimos en el sistema tenemos $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow$ La matriz del sistema queda:

$$M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(f_1-f_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(f_2-f_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \\ 0=1 \end{cases} \Rightarrow$ Luego el sistema es incompatible.

Ejercicio 4. [2,5 puntos]

Dadas las rectas $s \equiv \dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{z-1}{2}$ y $t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$ se pide hallar la perpendicular común a *s* y a *t* y la distancia entre ambas rectas.

Para calcular el vector director de *t*, pasamos la recta a forma paramétrica: $t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+4}{4}$

$\Rightarrow \vec{v}_t = (1, 2, 4)$

Un punto de la recta puede ser $P_t = (1, 2, 0)$

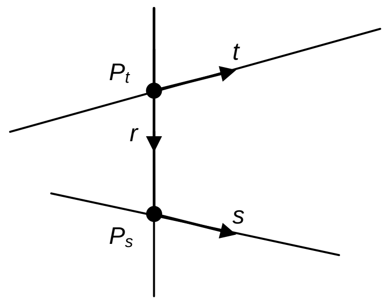
En forma paramétrica la recta *t* es: $t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$

Por otro lado tenemos que $\vec{v}_s = (3,1,2)$ y $P_s = (1, 0, 1)$, por lo que $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$

$\vec{v}_t = (1, 2, 4)$ y $\vec{v}_s = (3, 1, 2)$ no son paralelos, y por otro lado se comprueba que $P_s = (1, 0, 1)$ no pertenece a la recta *t*, por lo que las rectas se cruzan.

Un vector perpendicular a ambas rectas vendrá dado por:

$$\vec{v}_t \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0, 10, -5)$$



Por lo tanto el vector de la recta *r* perpendicular a ambas será $\vec{v}_r = (0, 10, -5)$

Hallamos un punto genérico de la recta *t* y de la recta *s*:

$P_t = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, 4\lambda)$ y $P_s = (1 + 3\mu, \mu, 1 + 2\mu)$

$\overrightarrow{P_tP_s} = (3\mu - \lambda, \mu - 2 - 2\lambda, 1 + 2\mu - 4\lambda)$

Si imponemos que $\overrightarrow{P_tP_s} = (3\mu - \lambda, \mu - 2 - 2\lambda, 1 + 2\mu - 4\lambda)$ sea paralelo a $\vec{v}_r = (0, 10, -5)$, tendremos:

$$\frac{3\mu - \lambda}{0} = \frac{\mu - 2 - 2\lambda}{10} = \frac{1 + 2\mu - 4\lambda}{-5} \rightarrow \begin{cases} 30\mu - 10\lambda = 0 \\ -5\mu' + 10\lambda + 10 = 10 + 20\mu' - 40\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\mu - \lambda = 0 \\ -\mu' + 2\lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu' = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores encontrados obtenemos los puntos por los que la recta *t* cortará a las otras dos rectas:

$P_t = (1, 2, 0)$ y $P_s = (1, 0, 1)$

Por lo tanto, la ecuación de la recta *r* en paramétricas, dado $\vec{v}_r = (0, 10, -5)$ y $P_r = P_t = (1, 2, 0)$ será:

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 10\gamma \\ z = -5\gamma \end{cases}$$

Para hallar la distancia entre las rectas aplicamos $d(t, s) = d(P_t, P_s) = \sqrt{0 + (0-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$