Ejercicios sin corregir y alguno más para repasar.

11 **Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

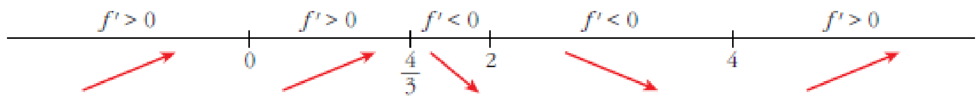
$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 16x + 16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$

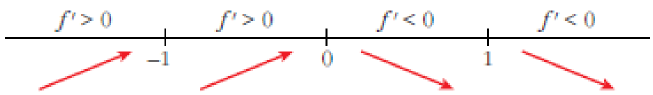
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

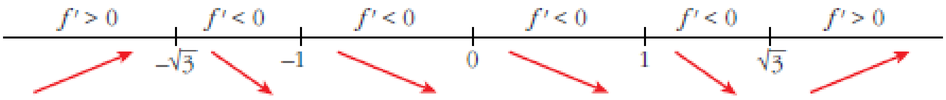
tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3) = 0 \;\left\langle\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{2\}$

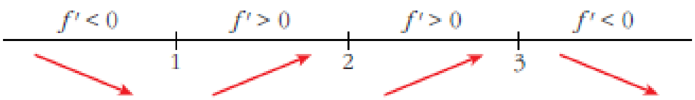
$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x) - (2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2-x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \left\langle\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(1, -1)$

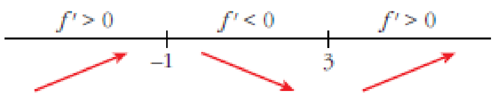
tiene un máximo en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, 3)$

tiene un máximo en $(-1, 5)$

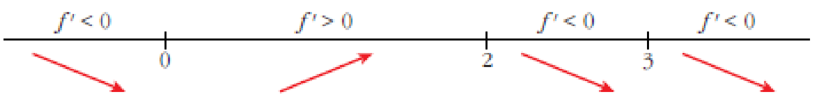
tiene un mínimo en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8x(3x - 6)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8(3x - 6)}{x^3(x - 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en $(2, -2)$

2 S **Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 4) \end{array} \right.$$

Recta tangente en $(0, 0)$: $y = -2x$

Recta tangente en $(2, 4)$: $y = 4 - 2(x - 2) \;\rightarrow\; y = -2x + 8$

4 S **Halla un punto de la gráfica $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a $y = 3x + 8$.**

- La pendiente de la recta $y = 3x + 8$ es $m = 3$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga 3:

  $f'(x) = 2x + 1$

  $f'(x) = 3 \;\rightarrow\; 2x + 1 = 3 \;\rightarrow\; x = 1 \;\rightarrow\; y = 7$
- El punto es $(1, 7)$.

5 S **Halla una recta que sea tangente a la curva:**

$$y = x^2 - 2x + 3$$

y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas. ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal?

- Si forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas, su pendiente es $tg\ 45° = 1$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga 1:

  $f'(x) = 2x - 2$

  $f'(x) = 1 \;\rightarrow\; 2x - 2 = 1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; y = \dfrac{9}{4}$
- La recta es: $y = \dfrac{9}{4} + \left(x - \dfrac{3}{2}\right) \;\rightarrow\; y = x + \dfrac{3}{4}$
- Veamos si hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal; es decir, en el que la derivada valga cero:

  $f'(x) = 2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\;$ Punto $(1, 2)$

6 **Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:**

a) $y = x \ln x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = \operatorname{sen} 2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; \ln x + 1 = 0 \;\rightarrow\; \ln x = -1 \;\rightarrow\; x = e^{-1} = \frac{1}{e} \;\rightarrow\; y = \frac{-1}{e}$$

La recta tangente en el punto $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$ es: $y = \dfrac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\, e^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$. Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto $(0, 0)$, la recta tangente es: $y = 0$
- En el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \dfrac{4}{e^2}$

c) $y' = 2 \cos 2x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\cos 2x = 0 \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = 1 \\[2ex] 2x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$
- En los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

7 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y \cdot y^x = 1$ en el punto $(1, 1)$.**

Para hallar la derivada tomamos logaritmos:

$$x^y \cdot y^x = 1 \;\rightarrow\; y \ln x + x \ln y = \ln 1 \;\rightarrow\; y \ln x + x \ln y = 0$$

Derivamos:

$$y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} + \ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

$$y'\, xy \ln x + y^2 + xy \ln y + x^2\, y' = 0$$

$$y'(xy \ln x + x^2) = -y^2 - xy \ln y$$

$$y' = \frac{-y^2 - xy \ln y}{xy \ln x + x^2}$$

$$y'(1, 1) = -1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es:

$$y = 1 - (x - 1); \text{ es decir, } y = -x + 2$$

58 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \lim_{x \to 0^+} x \ln (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot +\infty) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2) + e^{2/x} \cdot (-2/x^2)}{e^{1/x} + e^{2/x}}}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x} + 2}{e^{-1/x} + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

((*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{2/x}$).

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^2$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0^-} \ln (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \lim_{x \to 0^-} x \ln (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot -\infty) =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + 2e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{1} = 1$$

((*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{1/x}$).

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^1 = e$

75
S **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]?**

En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$; luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 4]$.

Veamos en qué punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \quad \to \quad 3x^2 - 10x + 3 = -1 \quad \to \quad 3x^2 - 10x + 4 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$

78 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $\left[0, 3\sqrt{2}\right]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in \left(0, 3\sqrt{2}\right)$ para que el $f'(c) = 0$.**

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego, verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{6}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{6} & \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} & \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

86 **Calcula b para que $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde cumple la tesis?**

$f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, b]$ y derivable en $(0, b)$, cualquiera que sea el valor de b.

Para que cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, b]$, ha de tenerse que $f(0) = f(b)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(b) = b^3 - 4b + 3 \end{array}\right\} \; b^3 - 4b + 3 = 3 \;\rightarrow\; b^3 - 4b = 0$$

$$b(b^2 - 4) = 0 \begin{cases} b = 0 \;\; \text{(no vale)} \\ b = -2 \;\; \text{(no vale)} \\ b = 2 \end{cases}$$

(Como consideramos el intervalo $[0, b]$, ha de ser $b > 0$).

Por tanto, el teorema de Rolle se cumple en $[0, 2]$.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{4}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

La tesis se cumple en $c = \sqrt{\dfrac{4}{3}} \in (0, 2)$; es decir, $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.