Ejercicios de funciones

Funciones definidas a trozos. Valor absoluto

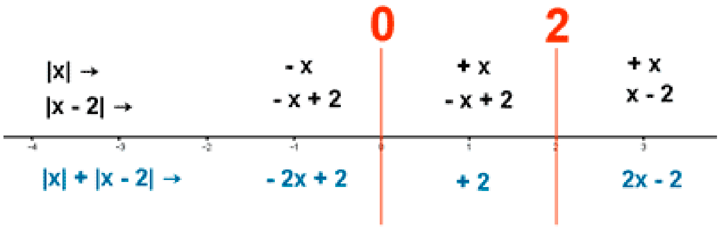
Sea la función: f(x) = | x | + | x − 2 |

a) Expresa f(x) como una función definida a trozos

b) Dibuja la gráfica de f(x)

c) Escribe el intervalo abierto de la recta real formado por los puntos en los que f(x) es derivable y se anula su derivada

a) Estudiamos cada valor absoluto por separado:



$$|x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x-2<0 \\ x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2 & \text{si } x<2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

b) Dibuja la gráfica de f(x).

Son funciones polinómicas, por lo que son continuas en todo $\mathbb{R}$, y en particular, lo son en sus intervalos de definición.

Estudiamos la continuidad de f en los puntos de unión: x = 0 , x = 2

- **x = 0** f(0) = 2

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -2x+2 = 2 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 = 2$$

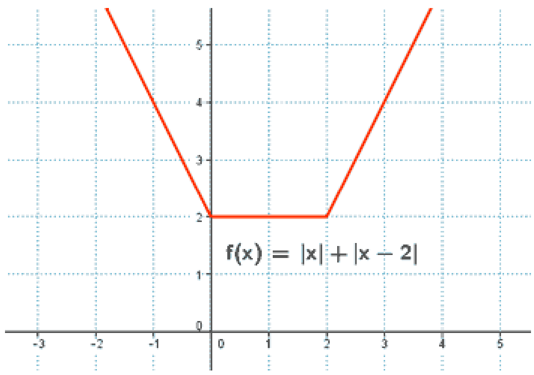
Luego la función es continua en x = 0 .

- **x = 2** f(2) = 2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 2x-2 = 2$$



Contínua en x=2 . Por tanto, la función f es continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Escribe el intervalo abierto de la recta real formado por los puntos en los que f(x) es derivable y se anula su derivada.

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } 0\le x<2 \\ 2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

$$f'(0)=\begin{cases} f'(0^-)=-2 \\ f'(0^+)=0 \end{cases} \qquad f'(2)=\begin{cases} f'(2^-)=0 \\ f'(2^+)=2 \end{cases}$$

Por lo tanto f(x) es derivable en toda la recta real exceptuando los puntos x = 0 y x = 2 , es decir f(x) es derivable en $\mathbb{R}$ - {0, 2} .

El intervalo donde se anula la derivada es (0,2).

Sea la función: $f(x) = | x^2 + 2x - 15 |$

a) Expresa f(x) como una función definida a trozos
b) Dibuja la gráfica de f(x)
c) Determina los puntos en que no es derivable la funció

a) Expresa la función f(x) como una función definida a trozos

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-15 & \text{si } x^2+2x-15 \ge 0 \\ -x^2-2x+15 & \text{si } x^2+2x-15 < 0 \end{cases}$$

Para definir la función, tenemos que resolver la siguiente ecuación: $x^2 + 2x - 15 = 0$

Las raíces de la ecuación son x = 3 y x = -5 , tenemos que estudiar como se comporta la función en los siguientes intervalos: (-∞, -5) , (-5, 3) y (3, +∞)

Intervalo	(-∞, -5)	(-5, 3)	(3, +∞)
Punto de prueba	f(-6) > 0	f(0) < 0	f(4) > 0

Signo de f (x)	+	-	+

Por lo tanto la función queda definida de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-15 & \text{si} \quad x \le -5 \\ -x^2-2x+15 & \text{si} \quad -5<x<3 \\ x^2+2x-15 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

b) Dibuja la gráfica de f(x).

Las funciones son polinómicas, por lo que son continuas en todo $\mathbb{R}$, y en particular, lo son en sus intervalos de definición.

A continuación vamos a calcular los puntos de corte:

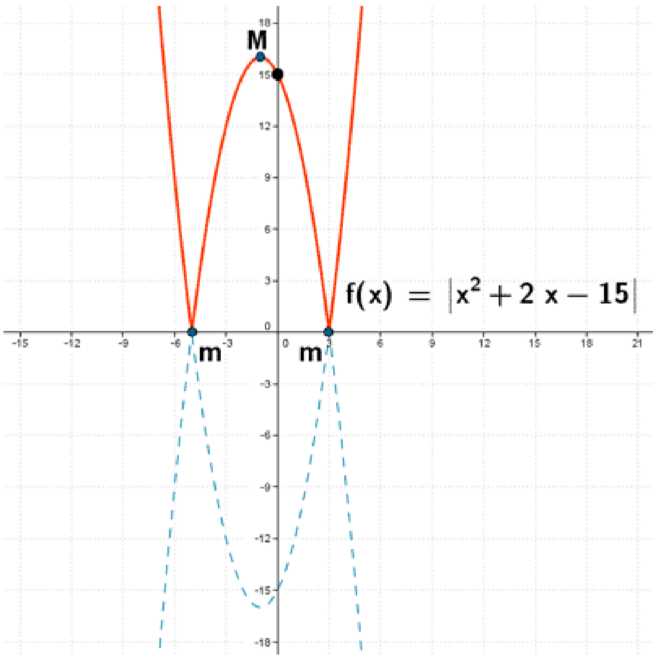
- Corte con el eje OX: f(x) = 0

$$\text{Si} \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^2+2x-15=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-5 \\ x=3 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: (-5, 0) y (3, 0)

- Corte con el eje OY: f(0) : El punto de corte es (0, 15)

Eje de simetría para x = - b / 2a . Es decir, x = -1 .
Por lo tanto el vértice es el punto V (-1, 16) .



c) Determina los puntos en que no es derivable la función.

La función es continua y derivable al tratarse de funciones polinómicas, por lo que tenemos que estudiar únicamente los puntos de unión.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x \leq -5 \\ -2x-2 & \text{si} \quad -5 < x < 3 \\ 2x+2 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(-5) = \begin{cases} f'(-5^-) = -8 \\ f'(-5^+) = +8 \end{cases} \qquad f'(3) = \begin{cases} f'(3^-) = -8 \\ f'(3^+) = +8 \end{cases}$$

Por lo tanto f(x) es derivable en toda la recta real exceptuando los puntos x = -5 y x = 3 , es decir f(x) es derivable en $\mathbb{R}$ - {-5, 3} .

Funciones exponenciales

$$y = x^2 e^{-x^2}$$

Dominio y rango o recorrido

- Dom(f) = R

Para hallar el recorrido de la función, invertimos las variables y calculamos el dominio de la variable y :

- Im(f) = [0, 1/e] p ero nosotros lo miramos en la gráfica.

Continuidad y tipos de discontinuidad La función es continua en R .

Puntos de corte con los ejes

- Corte con el eje OX: f(x) = 0 El punto de corte es: (0, 0)

$$x^2 \, e^{-x^2} = 0 \iff \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \iff x = 0$$

- Corte con el eje OY: f(0) El punto de corte es: (0, 0)

Intervalos de signo constante

Como el puntos de corte con el eje OX es x = 0 , tenemos que estudiar los siguientes intervalos: (-∞, 0) , (0, +∞) :

Intervalo	(-∞, 0)	(0, +∞)
Punto de prueba	f(-3) > 0	f(3) > 0

Signo de f (x)	+	+

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Función par} \quad f(-x) = f(x)$$

Por lo tanto la función es simétrica respecto al eje OY .

Periodicidad No es periódica

Asíntotas

- **Asíntotas verticales** El denominador no se anula nunca, no existen asíntotas verticales

$$f(x) = x^2\, e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

- **Asíntotas horizontales**

Para hallar las asíntotas horizontales tenemos que estudiar los límites de la función en el infinito:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2\, e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = [\text{Regla de L'Hopital}] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{es una asíntota horizontal}$$

A continuación calculamos la posición relativa de la curva respecto a la asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0^+ \quad \Rightarrow \quad \text{La curva está por encima de la asíntota}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0^+ \quad \Rightarrow \quad \text{La curva está por encima de la asíntota}$$

- **Asíntotas oblicuas** No tiene

Monotonia: crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(2x - 2x^3\right)$$

$2x - 2x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1 - x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad o \quad 1 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad x = -1 \quad x = 1$

Por lo tanto tenemos que estudiar los siguientes intervalos: (-∞, -1) , (-1, 0) , (0, 1) , (1, +∞)

Intervalo	(-∞, -1)	(-1, 0)	(0, 1)	(1, +∞)
Punto de prueba	f ' (-3) > 0	f ' (-0,5) < 0	f ' (0,5) > 0	f ' (3) < 0
Signo de f ' (x)	+	-	+	-
Monotonía	Crece	Decrece	Crece	Decrece

Máximos y mínimos relativos

puntos críticos o puntos que anulan a la derivada primera son x = -1 x = 0 y x = 1 , vamos a determinar a través de la segunda derivada si se tratan de máximos o mínimos.

$$f''(x) = -2x \cdot e^{-x^2}\left(2x - 2x^3\right) + e^{-x^2} \cdot \left(2 - 6x^2\right) = e^{-x^2}\left(4x^4 - 10x^2 + 2\right)$$

- f '' (-1) < 0 ⇒ Hay un máximo en x = -1 ⇒ f(-1) = 1/e ⇒ Max (-1, 1/e)
- f '' (0) > 0 ⇒ Hay un mínimo en x = 0 ⇒ f(0) = 0 ⇒ Min (0, 0)
- f '' (+1) < 0 ⇒ Hay un máximo en x = +1 ⇒ f(+1) = 1/e ⇒ Max (1, 1/e)

Curvatura y puntos de inflexión

Se halla la derivada segunda, se iguala a 0 y se estudia su signo en los intervalos obetenidos:

$$f''(x) = e^{-x^2}\left(4x^4 - 10x^2 + 2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^4 - 10x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{5 + \sqrt{17}}}{2} \approx \pm 1{,}51 \\ x = \pm \dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{17}}}{2} \approx \pm 0{,}47 \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que estudiar los siguientes intervalos : (-∞, -1,51) , (-1,51, -0,47) , (-0,47, 0,47), (0,47, 1,51), (1,51, +∞)

Intervalo	(-∞, -1,51)	(-1,51, -0,47)	(-0,47, 0,47)	(0,47, 1,51)	(1,51, +∞)
Punto de prueba	f '' (-3) > 0	f '' (-1) < 0	f '' (0) > 0	f '' (1) < 0	f '' (3) > 0
Signo de f '' (x)	+	-	+	-	+
Curvatura	Concava (∪)	Convexa (∩)	Concava (∪)	Convexa (∩)	Concava (∪)

Punto de inflexión Los puntos que anulan a la derivada segunda son:

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2} \approx \pm 1{,}51 \\ x = \pm \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2} \approx \pm 0{,}47 \end{cases}$$

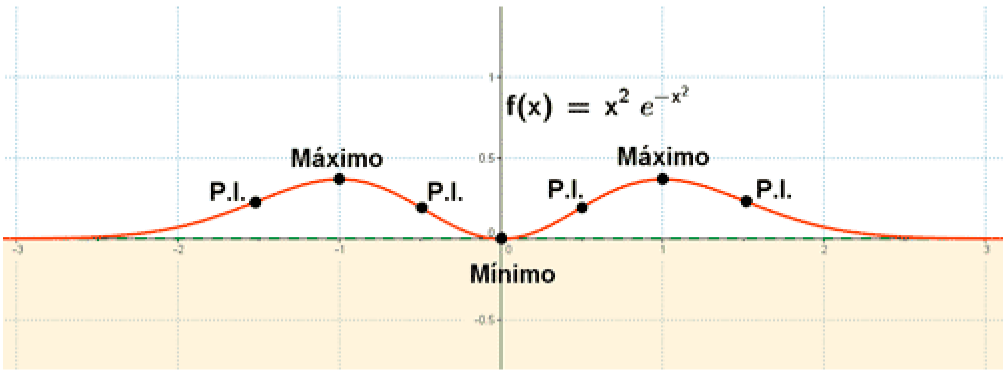
Vamos a determinar a través de la tercera derivada si se trata de puntos de inflexión:

$$f'''(x) = (-2x)\cdot e^{-x^2}\left(4x^4 - 10x^2 + 2\right) + e^{-x^2}\cdot\left(16x^3 - 20x\right) =$$

$$= e^{-x^2}\left(-8x^5 + 20x^3 - 4x + 16x^3 - 20x\right) = e^{-x^2}\left(-8x^5 + 36x^3 - 24x\right)$$

La tercera derivada no se anula para ninguno de los puntos anteriores, por lo tanto, todos ellos son puntos de inflexión.

$$\left.\begin{cases} f(-1{,}51) \approx 0{,}2 & \Rightarrow & (-1{,}51\ ,\ 0{,}2) \\ f(-0{,}47) \approx 0{,}2 & \Rightarrow & (-0{,}47\ ,\ 0{,}2) \\ f(+0{,}47) \approx 0{,}2 & \Rightarrow & (+0{,}47\ ,\ 0{,}2) \\ f(+1{,}51) \approx 0{,}2 & \Rightarrow & (+1{,}51\ ,\ 0{,}2) \end{cases}\right\} \text{Son puntos de inflexión}$$



Funciones logarítmicas

$$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Dominio

$$\frac{1}{x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$$

Al estar el denominador elevado al cuadrado, cualquier número menos el 0 cumple la condición:

- Dom(f) = R - {0} = (-∞, 0) ∪ (0, +∞)

Continuidad y tipos de discontinuidad

La función es continua en R - {0} , es decir, es discontinua en el punto x = 0

Puntos de corte con los ejes

- Corte con el eje OX: f(x) = 0

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} = e^0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Los puntos de corte son: (-1, 0) y (1, 0)

- Corte con el eje OY: f(0)

La función no está definida en x = 0 , por lo tanto la función no corta al eje OY.

Intervalos de signo constante

Como los puntos de corte con el eje OX son x = -1 y x = 1 y además la función es discontinua en el punto x = 0 , tenemos que estudiar los siguientes intervalos: (-∞, -1) , (-1, 0) , (0, 1) y (1, +∞) :

Intervalo	(-∞, -1)	(-1, 0)	(0, 1)	(1, +∞)
Punto de prueba	f(-3) < 0	f(-0,5) > 0	f(0,5) > 0	f(3) < 0

Signo de f (x)	-	+	+	-

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Función par} \quad f(-x) = f(x)$$

Periodicidad

No es periódica

Asíntotas

- **Asíntotas verticales**

$$\lim_{x \to 0} \left[\ln \left(\frac{1}{x^2} \right) \right] = \lim_{x \to 0} \left(\ln 1 - \ln x^2 \right) = 0 - \lim_{x \to 0} \left(\ln x^2 \right) = -(-\infty) = +\infty$$

Por las características del logarítmo, sabemos $\lim_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$ que:

Es decir, existe una asíntota vertical en x = 0 .

- **Asíntotas horizontales y oblicuas** No

Monotonia: crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 4) - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-4 - x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 = x^2$$

El numerador de la primera derivada no se anula para ningún valor, puesto que $x^2 \neq -4$ para cualquier valor de x .

Por lo tanto tenemos que estudiar los siguientes intervalos de discontinuidad sin incluir ninguno más puesto que no hay ningún valor que anule a la derivada primera: (-∞, -2) , (-2, 0) , (0, 2) , (2, +∞)

Intervalo	(-∞, -2)	(-2, 0)	(0, 2)	(2, +∞)
Punto de prueba	f ' (-3) < 0	f ' (-1) < 0	f ' (1) < 0	f ' (3) < 0
Signo de f ' (x)	-	-	-	-

Monotonía	Decrece	Decrece	Decrece	Decrece

Máximos y mínimos relativos

Ningún valor anula a la primera derivada, por lo tanto la función no tiene puntos críticos. Es decir, la función no tiene máximos ni mínimos.

Curvatura y puntos de inflexión

Se halla la derivada segunda, se iguala a 0 y se estudia su signo en los intervalos obetenidos:

$$= - \frac{2x\cdot\left(x^2 - 4 - 2x^2 - 8\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = - \frac{-2x^3 - 24x}{\left(x^2-4\right)^3} = \frac{2x^3 + 24x}{\left(x^2-4\right)^3} = \frac{x\left(2x^2+24\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

$$f''(x) = - \frac{2x\cdot\left(x^2-4\right)^2 - \left(x^2+4\right)\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left[\left(x^2-4\right)^2\right]^2} = - \frac{2x\cdot\cancel{\left(x^2-4\right)}\left[\left(x^2-4\right) - 2\left(x^2+4\right)\right]}{\left(x^2-4\right)^{\cancel{4}\,3}} =$$

La segunda derivada se anula para $x = 0$ y $2x^2 + 24 = 0$

La segunda ecuación no tiene solución real, por lo tanto la segunda derivada solamente se anula para $x = 0$.

Por lo tanto tenemos que estudiar los siguientes intervalos de discontinuidad incluyendo el valor que anula a la segunda derivada: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$

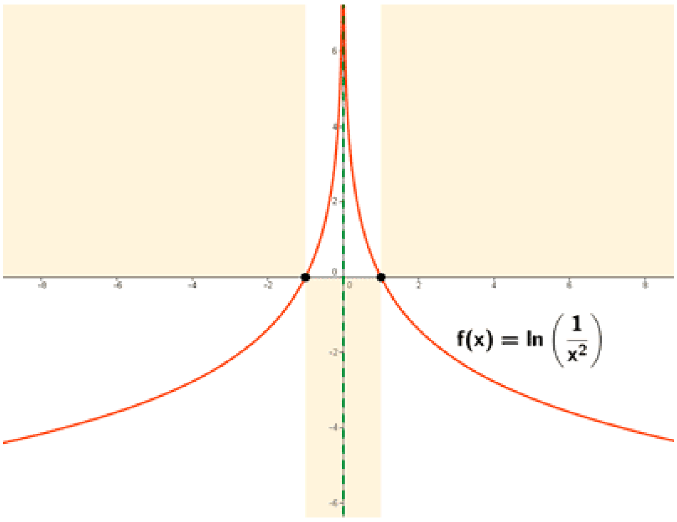
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(0, +\infty)$
Punto de prueba	$f''(-3) < 0$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Signo de f '' (x)	-	+	-	+
Curvatura	Convexa (∩)	Concava (∪)	Convexa (∩)	Concava (∪)

Punto de inflexión

Por el apartado anterior sabemos que el punto que anula a la derivada segunda es $x = 0$ y vamos a determinar a través de la tercera derivada si se trata de un punto de inflexión.

$$f'''(x) = -\frac{6x^4 + 144x^2 + 96}{x^8 - 16x^6 + 96x^4 - 256x^2 + 256} \Rightarrow f'''(0) = -\frac{96}{256} \neq 0$$

Por lo tanto $x = 0$ es la abscisa del punto de inflexión $\Rightarrow$ $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ Punto inflexión (0, 0)



$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{2 - \cos x}$$

Dominio

La función estará bien definida en todo R menos aquellos puntos que anulen al denominador:

$2 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2$, pero sabemos que $-1 < \cos x < 1 \Rightarrow \cos x \neq 2$ para todo $x \in R$ $\quad Dom(f) = R = (-\infty, +\infty)$

Puntos de corte con los ejes

Calculamos los puntos de corte que hayan dentro del primer período de nuestra función.

Puntos de corte con el eje Y:

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{\text{sen } 0}{2 - \cos 0} = \frac{0}{2 - 1} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

Puntos de corte con el eje X:

$$\text{Si} \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = 0 \quad , \left(2 - \cos x \neq 0\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ , \ x = \pi \ , \ x$$

Luego los puntos son: (0 , 0) , (π , 0) , (2π , 0)

Intervalos de signo constante

Como los puntos de corte con el eje OX son x = 0 , x = π , x = 2π , y tenemos que estudiar la función en el intervalo [0 , 2π] , estudiaremos el signo en los intervalos: (0, π) , (π , 2π)

Intervalo	(0, π)	(π , 2π)
Punto prueba	f(π/2) > 0	f(3π/2) < 0
Signo de f (x)	+	-

En la gráfica se marcan los puntos de corte con los ejes y las regiones donde no hay curva.

Monotonia: crecimiento y decrecimiento

Se halla la derivada primera, se iguala a 0 y se estudia su signo en los intervalos obtenidos:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)\,(2 - \cos x) - (\operatorname{sen} x)\,\left[-(-\operatorname{sen} x)\right]}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0$$

Para simplificar el resultado hemos aplicado la ecuación fundamental de la trigonometría:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1$

Resolvemos la ecuación para los x ∈ [0 , 2π] :

$$\frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \ , \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

Tenemos que estudiar la monotonía en los intervalos: (0, π/3) , (π/3 , 5π/3) , (5π/3 , 2π)

Intervalo	(0, π/3)	(π/3 , 5π/3)	(5π/3 , 2π)

Punto de prueba	f ' (π/4) > 0	f ' (π) < 0	f ' (7π/4) > 0
Signo de f ' (x)	+	-	+
Monotonía	Crece	Decrece	Crece

Máximos y mínimos relativos

Por el apartado anterior sabemos que los puntos críticos o puntos que anulan a la derivada primera son x = π/3 y x = 5π/3 , vamos a determinar a través de la segunda derivada si se tratan de máximos o mínimos.

Hallamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(-2\,\mathrm{sen}\,x)(2-\cos x)^{\cancel{2}} - (2\cos x - 1)\,2\,\cancel{(2-\cos x)}\,(\mathrm{sen}\,x)}{(2-\cos x)^{\cancel{4}}} = \frac{-2\,\mathrm{sen}\,x\,(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

- f '' (π/3) < 0 ⇒ Hay un máximo en x = π/3 ⇒ f(π/3) = √3/3 ⇒ Max (π/3, √3/3)

- f '' (5π/3) > 0 ⇒ Hay un mínimo en x = 5π/3 ⇒ f(5π/3) = -√3/3 ⇒ Min (5π/3, - √3/3)

Curvatura y puntos de inflexión

Se halla la derivada segunda, se iguala a 0 y se estudia su signo en los intervalos obetenidos:

$$f''(x) = \frac{-2\,\mathrm{sen}\,x\,(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\,\mathrm{sen}\,x\,(1+\cos x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}\,x = 0 \quad \text{ó} \quad 1+\cos x = 0$$

⇒ sen x = 0 ⇒ x = 0 , x = π , x = 2π

⇒ 1 + cos x = 0 cos x = - 1 ⇒ x = π

Tenemos que estudiar los siguientes intervalos: (0, π) , (π , 2π):

Intervalo	(0, π)	(π , 2π)
Punto de prueba	f '' (π/2) < 0	f '' (3π/2) < 0
Signo de f '' (x)	-	+

Curvatura	Convexa (∩)	Cóncava (∪)

Puntos de inflexión

Por el apartado anterior sabemos que los puntos que anulan a la derivada segunda son $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ y vamos a determinar a través de la tercera derivada si se tratan de un punto de inflexión.

$$f'''(x) = \frac{2\cos(x)^3 - 2\cos(x)^2 + 4\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)^2 - 4\cos(x) + 10\,\mathrm{sen}(x)^2}{\cos(x)^4 - 8\cos(x)^3 + 24\cos(x)^3 - 32\cos(x) + 16}$$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow x = 0$ es la abscisa del punto de inflexión $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow$ Punto inflexión (0 , 0)

$f'''(\pi) \neq 0 \Rightarrow x = \pi$ es la abscisa del punto de inflexión $\Rightarrow f(\pi) = 0 \Rightarrow$ Punto inflexión (π, 0)

$f'''(2\pi) \neq 0 \Rightarrow x = 2\pi$ es la abscisa del punto de inflexión $\Rightarrow f(2\pi) = 0 \Rightarrow$ Punto inflexión (2π, 0)