REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

$$y = x^4 - 8x^2 + 7$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Cortes con los ejes:

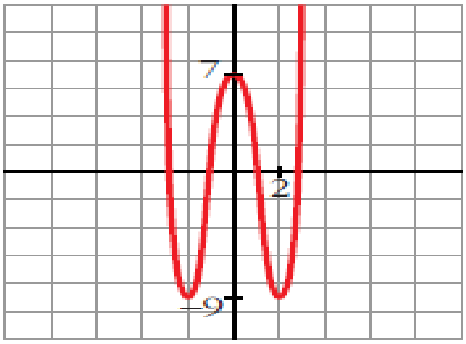
Puntos: $(-\sqrt{7}, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(\sqrt{7}, 0)$

Es par: simétrica respecto al eje *Y*.

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$



Puntos de inflexión:

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar

Corta a los ejes en $(0, 0)$.

- **Asíntotas verticales:**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Asíntota vertical en $x = 1$.

- **Asíntota oblicua:**

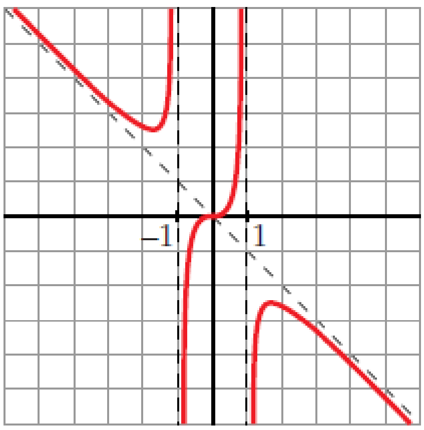
$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \rightarrow y = -x$ es asíntota oblicua.

Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



$$y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} \qquad \textit{Dominio} = \mathbb{R}$$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x). \text{ Es impar}$$

Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$

Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x^3 + 2x = 0$

Punto $(0, 0)$

• **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x \text{ es asíntota ol}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por encima)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

No hay puntos singulares.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$