11.28

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ \operatorname{sen}(2x)+\cos x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Hallar a y b para que $f(x)$ sea cont. y derivable en $x=0$

$f(0)=1$

$\lim_{x\to 0^-} ax+b=b$

$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(2x)+\cos x=1$

$\boxed{b=1}$

$$f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<0 \\ 2\cos(2x)-\operatorname{sen} x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} a=a$

$\lim_{x\to 0^+} 2\cos(2x)-\operatorname{sen} x)=2$

$\boxed{a=2}$

11.29

Continuidad y derivab. de $f(x)=|x+3|+|x-3|$

$$|x+3|=\begin{cases} -x-3 & \text{si } x<-3 \\ x+3 & \text{si } x\geq -3 \end{cases} \qquad |x-3|=\begin{cases} -x+3 & \text{si } x<3 \\ x-3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -x-3+(-x+3) & \text{si } x<-3 \\ x+3+(-x+3) & \text{si } -3\leq x<3 \\ x+3+x-3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x<-3 \\ 6 & \text{si } -3\leq x<3 \\ 2x & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

Continuidad

$x=-3$

$f(-3)=-2(-3)=6$

$\lim_{x\to -3^-} (-2x)=6$

$\lim_{x\to -3^+} 6=6$

continua en $x=-3$

$x=3$

$f(3)=2.3=6$

$\lim_{x\to 3^-} 6=6$

$\lim_{x\to 3^+} =2.3=6$

continua en $x=3$

$f(x)$ es continua en todo su dominio.

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x<-3 \\ 0 & \text{si } -3<x<3 \\ 2 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$\lim_{x\to -3^-} f'(x) \neq \lim_{x\to -3^+} f'(x)$

$\lim_{x\to 3^-} f'(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f'(x)$

$f(x)$ No es derivable en $x=-3$ y en $x=3$

11.35

$f(x) = x^3 - 3x + 5$ Comprobar que cumple el T. Rolle en $[-2, 1]$. Determina el valor $\underline{c}$ de T. Rolle. ¿Hay más de uno?

$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ cont. en } [-2,1] \\ f(x) \text{ derivable en } (-2,1) \\ f(-2) = 3 = f(1) \end{array}\right\}$ $c \in (-2,1) \Rightarrow f'(c) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ $\quad \underline{\underline{x = \pm 1}}$

$-1 \in (-2, 1)$

$1 \notin (-2, 1)$

$\boxed{c = -1}$

11.41

$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ ¿Existen valores de $\underline{a}$ y $\underline{b}$ en que $f(x)$ cumple el T.V.M.?

Cont. en $\underline{\underline{x=2}}$

$\left.\begin{array}{l} f(2) = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} 2x = 4 \\ \lim_{x\to 2^-} x^2 + ax + b = 4 + 2a + b \end{array}\right\}$ $\cancel{4} + 2a + b = \cancel{4}$

$\underline{2a + b = 0}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} f'(x)$

$4 + a = 2$

$\boxed{a = -2}$

Como $2a + b = 0 \rightarrow \boxed{b = 4}$

11.43

$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + mx^2 & \text{si } x \geq -2. \end{cases}$

a) $\underline{m}$ y $\underline{n}$ para que se cumple la hipot. del TVM.

b) Halla los ptos del intervalo

a) Cont. en $\underline{x=-2}$

$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -8 + 4m \\ \lim_{x\to -2^-} x^2 + nx = 4 - 2n \\ \lim_{x\to -2^+} x^3 + mx^2 = -8 + 4m \end{array}\right\}$ $-8 + 4m = 4 - 2n$

$4m + 2n = 12$

$\underline{2m + n = 6}$

tiene que ser derivable en $x = -2$

$f'(x) = \begin{cases} 2x + n & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 + 2mx & \text{si } x > -2 \end{cases}$

$\lim_{x\to -2^-} 2x + n = -4 + n$

$\lim_{x\to -2^+} 3x^2 + 2mx = 12 - 4m$

$\left.\begin{array}{l} -4 + n = 12 - 4m \\ \underline{\underline{n + 4m = 16}} \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} 2m + n = 6 \\ n + 4m = 16 \end{array}\right\}$ $\boxed{\begin{array}{l} m = 5 \\ n = -4 \end{array}}$

$\boxed{11.52}$ $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ pto de $f(x)$ en el que la pend. de la recta tg sea máxima.

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = (1-2x^2)\,e^{-x^2}$$

↓

<u>pendiente</u> para que sea máx su derivada $= 0$.

$$F'(x) = f''(x) = -4x\,e^{-x^2} + (1-2x^2) \cdot e^{-x^2}(-2x) = (-4x^3 - 6x)\,e^{-x^2}$$

$$F'(x) = f''(x) = 0 \qquad (-4x^3 - 6x)\,e^{-x^2} = 0 \qquad (-4x^3 - 6x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3/2} \\ x = -\sqrt{3/2} \end{cases}$$

$F'(x) = f''(x)$: $-$ | $-\sqrt{3/2}$ | $+$ | 0 | $-$ | $\sqrt{3/2}$ | $+$

↘ $-\sqrt{3/2}$ ↗ 0 ↘ $\sqrt{3/2}$ ↗

Máx relat. $(0, 0)$ → Para asegurarnos de que es máx absoluto, estudiamos los límites en el infinito de las pendientes → $f'(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - 2x^2)\,e^{-2x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} (1 - 2x^2)\,e^{-2x} = 0$$

↓

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(1 - 2x^2)}{e^{+2x}} = 0$$

Por tanto $(0, 0)$ pto en el que la pendiente de la recta tg es <u>máxima</u>

$$f'(0) = \frac{(1 - 2 \cdot 0^2) \cdot e}{e^0} = \frac{1}{1} = \underline{1}$$

$$\boxed{m_{\text{recta tg}} = 1}$$

$\boxed{11.75}$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- máx $x = -1$
- grat corta eje x $x = -2$.
- PI → $x = 0$.
- recta tg a $f(x)$ $x = 2$ es 9
  $f'(2) = 9$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Máx $x = -1$ $f'(-1) = 0$ $\quad \underline{3a - 2b + c = 0}$

· corta Eje x en $\left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 0 \end{array} \right.$ $f(-2) = 0$ $\quad \underline{-8a + 4b - 2c + d = 0}$

· PI $x = 0$.

$f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \quad \boxed{b = 0}$

· $f'(2) = 9 \qquad 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \qquad 12a + 4b + c = 9.$

$$\left.\begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ b = 0 \\ 12a + 4b + c = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{array}$$

$\boxed{11.76}$

$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ → Demostrar que no tn. PI

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$f''(x) = 12x^2 - 6x + 2$ → parábola ∪ $\quad 12x^2 - 6x + 2 = 0 \qquad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 12}$

↓

No tn. soluc. reales.

$\boxed{f''(x) > 0}$

Mínimo $y = 12x^2 - 6x + 2 \qquad x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 12} = \frac{1}{4}$

↓

Vértice de la parábola.