EJERCICIOS RESUELTOS DE ÁLGEBRA

1) Sean $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & p \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. **¿Puede ser SCD el sistema** $A\cdot X=C$**?**

Resolución:

La matriz ampliada del sistema es $\hat{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & p & a \\ 1 & -1 & -1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & p & a \\ 0 & -3 & -1-p & b-a \end{bmatrix}$

Claramente $r = r' \quad 2 \neq n \quad 3$.

Por tanto el sistema es SCI, independientemente de los valores de los parámetros.

En definitiva, este sistema nunca es compatible determinado.

2) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$**, determina todas las matrices no nulas** $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ **que cumplen la igualdad** $A\cdot X=m\cdot X$**, para algún número real m.**

Resolución:

$$A\cdot X=m\cdot X \Rightarrow A\cdot X-m\cdot X=[0] \Rightarrow (A-m\cdot I_3)\cdot X=[0]$$

$$A-m\cdot I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} - m\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3-m & 2 & -1 \\ -1 & -m & 1 \\ -1 & -2 & 3-m \end{bmatrix}$$

Llamo $B=A-m\cdot I_3$. De esta manera la igualdad inicial se puede escribir como $B\cdot X=[0]$.

Se trata de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo. Para que tenga solución no nula la matriz de coeficientes B debe tener rango menor que 3. Esto ocurrirá cuando $|B|=0$.

$$|B|=(3-m)(-m)(3-m)-2-2-[-m-2(3-m)-2(3-m)]=-m^3+6m^2-12m+8 \quad 0=$$

Una solución es $m=2$. Al aplicar Ruffini se comprueba que no hay más soluciones.

Por tanto si $m=2$ es un SCI.

Para resolverlo sustituimos $m=2$ en B obteniendo: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Tachamos F_2 y F_3 porque valen $-F_1$.

Queda la ecuación $x+2y-z=0$, cuya solución es $x=-2y+z$

Por tanto $X=\begin{bmatrix} -2y+z \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Para que esta matriz sea no nula tiene que ser $y\neq 0$ ó $z\neq 0$

3) Estudia el sistema $\begin{cases} \mathbf{x+y+z=a} \\ \mathbf{x+y+az=1} \\ \mathbf{x+ay+z=1} \\ \mathbf{ax+y+z=1} \end{cases}$ **sin resolverlo en ningún caso.**

<u>Resolución</u>:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & -a^2-a+2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-2a+3 \end{bmatrix}$$

En la matriz de coeficientes el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$

Distinguimos dos casos:

1) Si $a \neq 1 \Rightarrow$ el menor anterior es $\neq 0 \Rightarrow r = 3$ porque A solo tiene 3 columnas.

Para hallar r' calculamos $|\hat{A}|$ multiplicando los elementos de la diagonal principal:

$|\hat{A}| = (a-1)^2(-a^2-2a+3) = 0 \Rightarrow a = 1, -3$

Como estamos dentro del caso $a \neq 1$ solo vale la solución $a = -3$.

Ahora hay que distinguir subcasos:

1.1) Si $a \neq -3 \Rightarrow |\hat{A}| \neq 0 \Rightarrow r' = 4 \Rightarrow$ SI

1.2) Si $a = -3 \Rightarrow$ la última fila de $\hat{A}$ es nula y claramente $r' = 3 \Rightarrow$ SCD

2) Si $a = 1$, sustituyo: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r = r' = 1 \Rightarrow$ SCI

En resumen: $\begin{cases} \text{Si } a \neq 1, -3 \Rightarrow \text{SI} \\ \text{Si } a = -3 \Rightarrow \text{SCD} \\ \text{Si } a = 1 \Rightarrow \text{SCI} \end{cases}$

4) Estudia el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible, para $\mathbf{m = 1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{(2m+2)x+my+2z=2m-2} \\ \mathbf{2x+(2-m)y=0} \\ \mathbf{(m+1)x+(m+1)z=m-1} \end{cases}$$

Resolución: $\hat{A} = \begin{bmatrix} 2m+2 & m & 2 & 2m-2 \\ 2 & 2-m & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 & m-1 \end{bmatrix}$. No hacemos por ser complicado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = (2m+2)(2-m)(m+1) - 2(2-m)(m+1) - 2m(m+1)$$

$$= (m+1)\left[(2m+2)(2-m) - 2(2-m) - 2m\right] = (m+1)\left(-2m^2+2m\right) = 0 \Rightarrow m = 0, 1, -1$$

Distinguimos cuatro casos:

1) Si $m \neq 0, 1, -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow r' = 3$ porque solo hay 3 filas $\Rightarrow$ SCD

2) Si $m = 0$, sustituyo: $\hat{A} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow r = r' = 2 \Rightarrow$ SCI

3) Si $m = -1$, sustituyo: $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Observando F_3 se ve que es SI.

4) Si $m = 1$, sustituyo: $\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Se trata de un sistema homogéneo.

Para resolverlo divido F_3 entre 2 y la permuto con F_1 (no escribo la columna de ceros):

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Tacho F_3 y resuelvo: $y - 2z = 0 \Rightarrow y = 2z$; $x + z = 0 \Rightarrow x = -z$.

Por tanto la solución es $(-z, 2z, z)$

5) Estudia el siguiente sistema y resuélvelo solo cuando sea SCI: $\begin{cases} \mathbf{x+y+z+t=0} \\ \mathbf{x-y+z-t=12} \\ \mathbf{x+y-z+t=-8} \\ \mathbf{x-y-z+at=b} \end{cases}$

Resolución:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & -1 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & a-1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & a-1 & b \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & a+1 & b-12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & b-4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Distinguimos dos casos:

1) Si $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow r' = 4 \Rightarrow SCD$

2) Si $a = -1$, sustituyo: $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{bmatrix}$

Claramente $r = 3$ y el valor de r' depende de si $b-4=0$, es decir, si $b=4$.

Distinguimos dos subcasos:

2.1) Si $b \neq 4 \Rightarrow$ el menor formado por C_1, C_2, C_3 y C_5 es $\neq 0 \Rightarrow r' = 4 \Rightarrow SI$

2.2) Si $b = 4$ tachamos F_4 por ser nula y obtenemos $r' = 3 \Rightarrow SCI$

Resolvemos:

De F_3: $z = 4$

De F_2: $y + t = -6 \Rightarrow y = -6 - t$

De F_1: $x + y + z + t = 0 \Rightarrow x - 6 - t + 4 + t = 0 \Rightarrow x = 2$

Por tanto la solución es: $(2, -6-t, 4, t)$

6) Resuelve según los valores de los parámetros el sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x - 7y = a} \\ \mathbf{x + y = b} \\ \mathbf{5x - 13y = 5a - 2b} \\ \mathbf{x + 2y = a + b - 1} \end{cases}$

Resolución:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & -13 & 5a-2b \\ 1 & 2 & a+b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & a+b+1 \\ 3 & -7 & a \\ 5 & -13 & 5a-2b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -10 & a-3b \\ 0 & -18 & 5a-7b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 11a-3b-10 \\ 0 & 0 & 23a-7b-18 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Como el menor de orden dos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r = 2, \forall a, b$ (la matriz A solo tiene dos columnas)

Al observar las filas F_3 y F_4 de la matriz $\hat{A}$ se deduce que el sistema tendrá solución cuando $11a - 3b - 10 = 0$ y $23a - 7b - 18 = 0$. Resolvemos el sistema que forman estas dos ecuaciones y obtenemos la solución: $a = 2$, $b = 4$.

Distinguimos dos casos:

1) Si $a \neq 2$ ó $b \neq 4 \Rightarrow$ alguna de las filas F_3 ó F_4 será no nula y la ecuación correspondiente a esa fila será imposible $\Rightarrow SI$

2) Si $a = 2$ y $b = 4 \Rightarrow$ las filas F_3 y F_4 son ambas nulas y las podemos tachar.

Claramente $r' = 2 \Rightarrow SCD$

Para resolverlo nos queda la matriz ampliada $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Se resuelve este sistema obteniendo $y = 1$, $x = 3$

7) La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que poseen cada uno de los productos P, Q, R y S por unidad de peso. Queremos elaborar una dieta en la que intervengan todos los productos de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de vitamina C.

	P	Q	R	S
A	1	1	2	1
B	2	0	1	1
C	0	2	0	1

a) ¿Es posible elaborar esa dieta? ¿De cuántas formas se puede hacer?

b) Si la cantidad de producto Q es de 2 unidades, ¿cuáles serán las cantidades de los otros productos en esa dieta?

c) Obtén en función de la cantidad de producto Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos. ¿Entre qué valores tiene que estar la cantidad de producto Q?

Resolución:

a) Llamo x, y, z, t a las unidades de peso que hay que tomar, respectivamente, de cada producto P, Q, R, S para elaborar una dieta.

Según la tabla, la cantidad de vitamina A será: $1\cdot x+1\cdot y+2\cdot z+1\cdot t=20$; la de vitamina B será: $2\cdot x+0\cdot y+1\cdot z+1\cdot t=25$; la de vitamina C: $0\cdot x+2\cdot y+0\cdot z+1\cdot t=6$.

Con estas ecuaciones obtenemos el sistema: $\begin{cases} x+y+2z+t=20 \\ 2x+z+t=25 \\ 2y+t=6 \end{cases}$

Elaborar una dieta equivale a resolver el sistema y ver si tiene o no solución.

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 20 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Claramente $r=r'=3 \Rightarrow SCI$.

Por tanto sí se pueden elaborar dietas, de infinitas maneras.

b) Se trata de resolver el sistema para $y=2$.

De F_3 se deduce que $-3z=-9 \Rightarrow z=3$

De F_2: $-2y-3z-t=-15 \Rightarrow t=2$

De F_1: $x+y+2z+t=20 \Rightarrow x=10$

Por tanto las cantidades de los otros productos son: $P=10$, $R=3$, $S=2$

c) Se trata de resolver el sistema dando la solución en función de y.

Es fácil llegar a: $x=y+8;\ z=3;\ t=6-2y$

Por tanto: $P=Q+8,\ R=3,\ S=6-2Q$

Como todos los valores tienen que ser positivos, tiene que ser $Q\in(0,3)$

8) En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes vale 0. ¿Puede ser compatible? ¿Puede tener solución única? ¿Se le puede aplicar la regla de Cramer?

Resolución:

Escribimos el sistema $A\cdot X=C$. Por hipótesis la matriz A es cuadrada $n\times n$ y $|A|=0$.

Como $|A|=0 \Rightarrow r<n$. En consecuencia el sistema puede ser compatible, pero nunca será determinado y tampoco se le podrá aplicar la regla de Cramer.

9) Sean $A \cdot X = C_1$ y $A \cdot X = C_2$ dos sistemas con la misma matriz de coeficientes.

a) Justifica con un ejemplo que uno de los sistemas puede ser compatible y el otro incompatible.

b) ¿Puede ser incompatible uno y compatible determinado el otro?

c) Si ambos son compatibles, ¿puede ser uno determinado y el otro indeterminado?

Resolución:

a) El sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ es compatible indeterminado porque la segunda ecuación sobra.

El sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ es incompatible porque es imposible que se cumplan las dos ecuaciones a la vez.

b) Como la matriz de coeficientes es la misma, los dos sistemas tienen el mismo valor r para el rango de A y el mismo número de incógnitas, n.

Las matrices ampliadas son $\widehat{A}_1 = [A, C_1]$ y $\widehat{A}_2 = [A, C_2]$.

El rango de estas matrices puede ser diferente, así que los llamamos r_1 y r_2. Como el número de filas de estas matrices es $n \Rightarrow r_1$ y $r_2 \leq n$

Si el primer sistema es incompatible $\Rightarrow r < r_1 \leq n \Rightarrow r < n$

Si el segundo sistema es compatible determinado $\Rightarrow r = r_2 = n$

Es imposible por tanto que ocurran ambas cosas a la vez.

c) Si el primer sistema es compatible determinado $\Rightarrow r = r_1 = n$

Si el segundo sistema es compatible indeterminado $\Rightarrow r = r_2 < n$

Es imposible por tanto que ocurran ambas cosas a la vez.

10) Si $a + b \neq 0$, demuestra que el sistema $\begin{cases} ax + by = 1 \\ ay + bz = r \\ bx + az = s \end{cases}$ es compatible determinado.

Resolución:

La matriz ampliada del sistema es $\widehat{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 1 \\ 0 & a & b & r \\ b & 0 & a & s \end{bmatrix}$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3$.

Como $a + b \neq 0 \Rightarrow a \neq -b \Rightarrow a^3 \neq -b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 \neq 0$

Por tanto $|A| \neq 0 \Rightarrow r = 3$

Como el número de filas es 3 $\Rightarrow r' = 3$

Como el número de incógnitas también es 3 $\Rightarrow$ SCD