Halla el ángulo que forman las siguientes rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

Los vectores directores de r_1 y r_2 son, respectivamente, $\vec{d_1}(-2, 1)$ y $\vec{d_2}(-4, 3)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{|\vec{d_1}|\,|\vec{d_2}|} = \frac{8+3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}984 \rightarrow \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}4''$$

Halla la distancia de $Q(-3, 4)$ a las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 4$ **b)** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{5}$ **c)** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$ **d)** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

a) $2x + 3y - 4 = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|2\cdot(-3) + 3\cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-6+12-4|}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx 0{,}55$$

b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{5} \rightarrow 5x - 5 = 2y - 8 \rightarrow 5x - 2y + 3 = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|5\cdot(-3) - 2\cdot 4 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|-15-8+3|}{\sqrt{29}} = \frac{20\sqrt{29}}{29} \approx 3{,}71$$

c) $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-1}{-2} \\ t = \dfrac{y-3}{-6} \end{array}\right\} \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-3}{-6} \rightarrow -6x + 6 = -2y + 6 \rightarrow 6x - 2y = 0 \rightarrow 3x - y = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|3\cdot(-3) - 4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-9-4|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10} \approx 4{,}11$$

d) $3x + 2y = 6 \rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|3\cdot(-3) + 2\cdot 4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-9+8-6|}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} \approx 1{,}94$$

Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.

☛ ***El eje de ordenadas es el vertical: $x = 0$.***

- Veamos primero cuál es el punto de corte, $P(x, y)$, de la recta con el eje de ordenadas.

$$r: \begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \end{cases} \rightarrow 4 - 0 + 3y - 6 = 0 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2$$

Luego $P(0, 2) \in r$ y también debe ser $P(0, 2) \in s$, donde $s \perp r$.

- Como $s \perp r \rightarrow$ sus pendientes deben cumplir:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-4/3} = \frac{3}{4}$$

- Como $P(0, 2) \in s$ y $m_s = \dfrac{3}{4} \rightarrow y = \dfrac{3}{4}x + 2 \rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:

a) Su vector de posición es $\vec{a}(-3, 1)$ y su vector de dirección $\vec{v}(2, 0)$.

b) Pasa por $A(5, -2)$ y es paralela a: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Pasa por $A(1, 3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

d) Es perpendicular al segmento PQ en su punto medio, siendo $P(0, 4)$ y $Q(-6, 0)$, en su punto medio.

a) La ecuación vectorial será:

$$\vec{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$$

b) El vector dirección de la recta buscada debe ser el mismo (o proporcional) al de la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (pues debe ser paralela a ella).

Luego: $\vec{d}(-1, 2)$

Como debe pasar por A(5, –2) $\rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) La pendiente de la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ es:

$$m_r = \frac{2}{3} \rightarrow m_s = \frac{-3}{2} \quad (\text{pues } m_r \cdot m_s = -1 \text{ por ser } r \perp s)$$

Un vector director puede ser $\vec{s} = (2, -3)$.

Además, $A(1, 3) \in s$.

Por tanto, $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

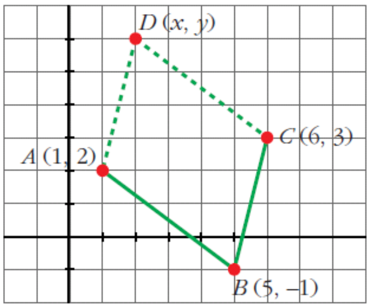
d) El punto medio de PQ es $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$\vec{PQ} = (-6, -4)$

$\rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}(4, -6) \text{ es un vector director de } s, \text{ pues } \vec{d} \perp \vec{PQ} \end{cases}$

Luego, $s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(6, 3)$.



Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(5-1, -1-2) = (6-x, 3-y) \rightarrow$

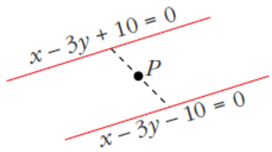
$$\rightarrow \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$

Determina c para que la distancia de la recta $x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Hay dos soluciones).

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \rightarrow c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \rightarrow c_2 = -10 \end{cases}$

Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas:



Calcula el valor de a para que la distancia del punto $P(1, 2)$ a la recta $ax + 2y - 2 = 0$ sea igual a $\sqrt{2}$.

$$dist(P, r) = \sqrt{2} \rightarrow \frac{|a \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{a^2+4}} = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} = \sqrt{2} \rightarrow a + 2 = \sqrt{2(a^2+4)} \\ \dfrac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} = -\sqrt{2} \rightarrow a + 2 = -\sqrt{2(a^2+4)} \end{cases}$$

Al elevar al cuadrado obtenemos la misma ecuación en ambos casos.

$$\rightarrow (a+2)^2 = 2(a^2+4) \rightarrow a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

En el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, -4)$, halla las ecuaciones de:

a) La altura que parte de B.

b) La mediana que parte de B.

c) La mediatriz del lado CA.

a) La altura que parte de B, h_B, es una recta perpendicular a AC que pasa por el punto B:

$$\left.\begin{array}{l} h_B \perp AC(5, -7) \rightarrow \text{el vector director de } h_B \text{ es } \vec{h}_B(7, 5) \\ B(5, 1) \in h_B \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow h_B: \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-5}{7} \\ t = \dfrac{y-1}{5} \end{cases} \rightarrow \frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow h_B: 5x - 7y - 18 = 0$$

b) m_B (mediana que parte de B) pasa por B y por el punto medio, m, de AC:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\dfrac{-2+3}{2}, \dfrac{3-4}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in m_B \\ B(5, 1) \in m_B \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{m}_B\left(5 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ es vector director de } m_B.$$

Luego:

$$m_B: \begin{cases} x = 5 + \dfrac{9}{2}t \\ y = 1 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 10 + 9t \\ t = \dfrac{2y-2}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x-10}{9} \\ t = \dfrac{2y-2}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{2x-10}{9} = \frac{2y-2}{3} \rightarrow m_B: 6x - 18y - 12 = 0$$

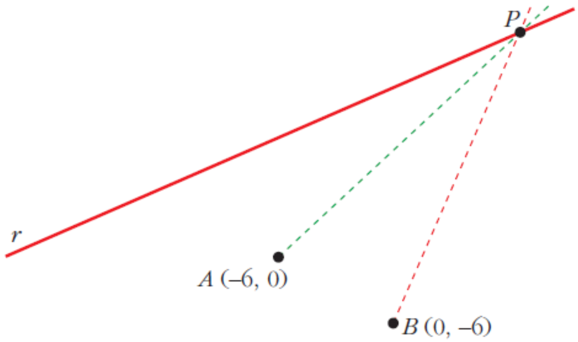
c) La mediatriz de CA, z, es perpendicular a CA por el punto medio del lado, m'. Así:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{CA} = (-5, 7) \perp z \rightarrow \text{vector director de } z: \vec{z}(7, 5) \\ m'\left(\dfrac{3-2}{2}, \dfrac{-4+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in z \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 7t \\ y = -\dfrac{1}{2} + 5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x-1}{14} \\ t = \dfrac{2y+1}{10} \end{cases} \rightarrow \frac{2x-1}{14} = \frac{2y+1}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow z: 20x - 28y - 24 = 0 \rightarrow z: 5x - 7y - 6 = 0$$

Halla el punto de la recta $3x - 4y + 8 = 0$ que equidista de $A(-6, 0)$ y $B(0, -6)$.



$P(x, y)$ debe verificar dos condiciones:

1. $P(x, y) \in r \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

2. $dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$

$$\to \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 + 12y + 36 \end{cases} \to \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \to$$

$$\to 3x - 4x + 8 = 0 \to x = 8 = y \to P(8, 8)$$

Calcula c para que la distancia entre las rectas $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \to y_0 = 2 \to P(0, 2) \in r_1$

Así, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \to$

$$\to \frac{|6 + c|}{5} = 3 \to \begin{cases} 6 + c = 15 \to c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \to c_2 = -21 \end{cases}$$

Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eje } X: y = 0\\ \text{Eje } Y: x = 0\\ P(x, y) \in r\end{array}\right\} \to \begin{cases} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y)\\ x - 2y - 6 = 0\end{cases} \to$$

$$\to \begin{array}{l}\dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \to \text{dos casos: } \begin{cases} x = y\\ x = -y\end{cases} \to\\ x - 2y - 6 = 0\end{array}$$

$$\to \begin{cases} y - 2y - 6 = 0 \to y_1 = -6 \to x_1 = -6\\ -y - 2y - 6 = 0 \to y_2 = -2 \to x_2 = 2\end{cases} \to \begin{cases} P_1\,(-6, -6)\\ P_2\,(2, -2)\end{cases}$$